CINQUIÈME RÉCRÉATION.

LE JEU DU SOLITAIRE.

A M. H. Hermary, ancien élève de l'École Polytechnique, capitaine au Comité d'artillerie.

« Les premières notions de mathématiques doivent faire partie de l'éducation de l'enfanee. Les chiffres, les lignes parlent plus qu'on ne croit à leur imagination naissante, et c'est un moyen sûr de l'exercer sans l'égarer. »

(CONDORCET, *Discours sur les Mathématiques.*)

« Il faut jouer au solitaire,
Quand on n'est plus dans les beaux ans. »

(PANARD, *Chansons*, t. III.)

CINQUIÈME RÉCRÉATION.

LE JEU DU SOLITAIRE.

Comme son nom l'indique, le jeu du solitaire est joué par une seule personne; il consiste, au point de vue le plus général, dans la recherche de problèmes concernant la géométrie de situation. Cependant ce jeu peut être effectué par deux ou plus de deux personnes, qui se proposeraient réciproquement la résolution de problèmes de plus en plus compliqués. Cette remarque s'applique d'ailleurs à tous les jeux qui sont étudiés dans ce volume; tous peuvent être joués par un seul partenaire ou par plusieurs.

HISTORIQUE.

D'après l'*Encyclopédie méthodique*, ce jeu nous viendrait d'Amérique, où un voyageur français en aurait conçu l'idée et

réglé la marche, en regardant des sauvages qui revenaient de la chasse, et plantaient leurs flèches en différents trous disposés régulièrement sur la paroi de leurs cabanes. Le *Dictionnaire des origines* fait observer, mais sans en dire plus, que le jeu du solitaire dérive du *jeu des mages*, ou des carrés magiques. Il est fort possible qu'il y ait une relation étroite entre ces deux jeux : c'est là une question intéressante que nous soumettons à la perspicacité de nos lecteurs. D'autres font naître le solitaire en Chine, à une époque très reculée.

Quoi qu'il en soit, le jeu du solitaire était bien connu dès le commencement du dernier siècle. Le premier volume des Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin (*Miscellane Berolinensia*, 1710) contient un Mémoire de Leibniz ayant pour titre : *Annotatio de quibusdam ludis*, etc., et qui débute ainsi : « Non ita pridem increbuit ludi genus singulare quem *Solitarium* appelant [1].» On y trouve encore le pasage suivant : « Sæpe notavimus nusquam homines quam in ludicris ingeniosiores esse : atque ideo ludos Mathematicorum curam mereri, non per se, sed artis inveniendi causa. » Plus tard, dans une lettre adressée à M. de Montmort, le 17 janvier 1716, Leibniz s'exprimait ainsi : « Le jeu nommé *le Solitaire* m'a plu assez. Je l'ai pris d'une manière renversée, c'est-à-dire qu'au lieu de défaire un composé de pièces selon la loi de ce jeu, qui est de sauter dans une place vide et d'ôter la pièce sur laquelle on saute, j'ai cru qu'il serait plus beau de rétablir ce qui a été défait, en remplissant un trou sur lequel on saute; et par ce moyen on pourrait se proposer de former une telle ou telle figure proposée, si elle est faisable, comme elle l'est sans

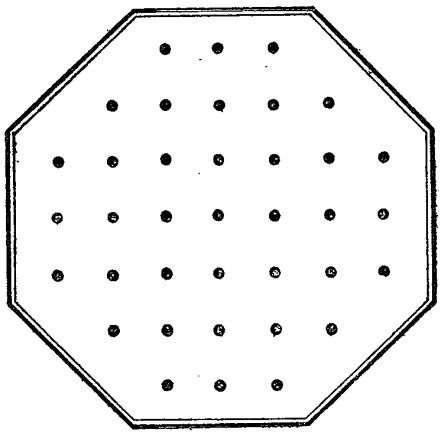
[1] *Voir le Dictionnaire mathématique* de Klügel, continué par Mollweide (*Klügel's math. Wöterbuch*, IVe partie, p. 466).

doute si elle est défaisable. Mais à quoi bon cela? dira-t-on. Je réponds : à perfectionner l'art d'inventer. Car il faudrait avoir des méthodes pour venir à bout de tout ce qui peut se trouver par raison. »

DÉFINITION DU SOLITAIRE.

Ce jeu se compose essentiellement d'une planchette ayant la forme d'un octogone régulier, et percée de *trente-sept* trous placés aux sommets de carrés, conformément à la figure suivante.

Fig. 23.



Tous ces trous sont garnis d'une cheville, en os ou en ivoire, appelée *fiche*. Cependant, depuis quelques années, on a remplacé la planchette octogone par une planchette circulaire, les trous

par des creux hémisphériques, et les fiches par des billes ou des *boules*.

Lorsqu'on n'a pas de jeu de solitaire à sa disposition, on y supplée facilement, en utilisant certaines *cases* du damier, et en se servant des pions. Mais il est encore plus simple de dessiner sur une feuille de carton la figure suivante, en plaçant les numéros correspondants dans le même angle de chacun des carrés de l'échiquier. On observera que la notation dont nous nous servons est entièrement conforme aux principes de la géométrie analytique; nous ajouterons que c'est la notation qui a été proposée pour l'échiquier (¹) par un illustre mathématicien français de la fin du siècle dernier, que la science française a trop laissé jusqu'à présent dans l'oubli : je veux parler de Vandermonde.

Dans la figure, nous laisserons de côté, pour l'instant, les carrés ou *cases* numérotées **04**, **40**, **48**, **84**, qui n'appartiennent pas au solitaire que l'on trouve le plus communément dans le commerce.

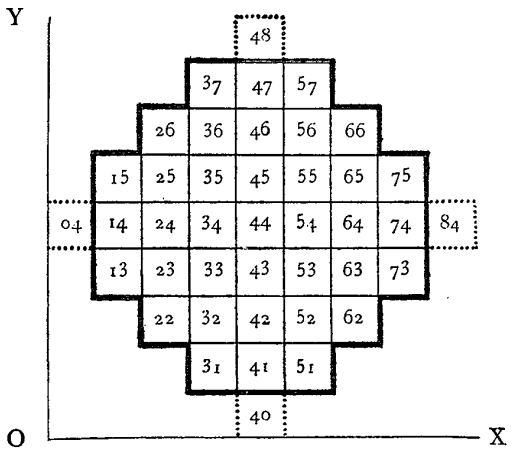
Nous appellerons *coins* du solitaire les cases numérotées, **13** et **31**, **15** et **51**, **37** et **73**, **57** et **75**; *milieux*, les cases numérotées, **14** et **41**, **26** et **62**, **47** et **74**, **22** et **66**; *fronts*, l'ensemble des trois cases contiguës, telles que **13**, **14**, **15**, ou **31**, **41**, **51**, ou **37**, **47**, **57**, ou **73**, **74**, **75**; *pourtour* ou périmètre, l'ensemble des coins et des milieux limitant le solitaire, et enfin *centre*, la case **44**.

Nous dirons que plusieurs cases sont *consécutives*, lorsqu'elles

(¹) *Remarques sur les problèmes de situation*, par Vandermonde. — *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris* pour l'année 1771, p. 566-574. On trouve dans ce Mémoire une solution curieuse du problème du cavalier des échecs sur un échiquier cubique, et les premiers éléments scientifiques de la *géométrie des tissus à fils curvilignes*, qui comprend, en particulier, la fabrication des articles de bonneterie (tricots, bas, chaussettes, caleçons, bonnets de coton, etc.).

se succèdent sans interruption sur une même ligne horizontale ou sur une même colonne verticale; ainsi les cases **32**, **33**, **34**, **35** sont consécutives sur la même colonne. Dans ce cas, le premier chiffre de la notation des cases est le même, et le second chiffre représente les nombres entiers successifs; de même, les cases **23**,

Fig. 24.



33, **43**, **53** sont consécutives dans la même ligne; alors le second chiffre de la notation est constant, tandis que le premier chiffre représente les nombres entiers successifs. En général, nous désignerons le premier chiffre de la notation de la case, c'est-à-dire le rang de la colonne où elle se trouve par le mot *abscisse*, et le second chiffre de la notation de la case, c'est-à-dire le rang de la ligne où se trouve cette case, par le mot *ordonnée*.

RÈGLE DU JEU DU SOLITAIRE.

Lorsque le solitaire est entièrement couvert de boules, on commence par retirer l'une d'elles; cela fait, lorsque le solitaire présente une ou plusieurs cases vides, une boule quelconque peut *prendre* une autre boule qui lui est contiguë, dans le sens horizontal ou dans le sens vertical, lorsqu'en sautant par-dessus, soit horizontalement, soit verticalement, elle peut venir se placer, en continuant son mouvement, sur la case vide immédiatement voisine. Par exemple, la boule 34 peut prendre :

1°	La boule	35	en venant se placer sur la case vide		36;
2°	—	33	—	—	32;
3°	—	24	—	—	14;
4°	—	44	—	—	54.

Nous indiquerons cette manœuvre, que l'on appelle un *coup soustractif*, par une fraction ayant pour numérateur la case de départ de la boule qui prend, et pour dénominateur la case d'arrivée. Ainsi, pour chacun des quatre coups hypothétiques qui précèdent, la notation serait

$$\frac{34}{36}, \frac{34}{32}, \frac{34}{14}, \frac{34}{54}.$$

On observera que, dans chacune de ces fractions qui représentent la notation d'un coup, les premiers ou les derniers chiffres diffèrent nécessairement de deux unités.

On peut se proposer sur le solitaire des problèmes très variés. Suivant la méthode analytique, nous commencerons par donner

la solution de quelques problèmes très simples qui feront mieux comprendre la règle du jeu.

PREMIERS EXERCICES.

Dans les Exercices suivants, on couvre de boules plusieurs cases du solitaire; il s'agit, en suivant la règle, de prendre toutes les boules, à l'exception d'une seule. Ces problèmes sont extraits, en très grande partie, d'un ouvrage ayant pour titre : *Recherches sur le jeu du solitaire*, livre posthume du chevalier Paul Busschopp, publié par les soins de son frère, Jules Busschopp. Nous avons d'ailleurs modifié la notation incommode de l'auteur, ainsi que l'ordre de ces exercices; mais nous avons conservé les titres de ces problèmes, qui sont basés, en général, sur la forme initiale ou finale de l'ensemble des boules qui couvrent le solitaire.

Le lecteur qui tient à se familiariser avec la pratique de ce jeu devra répéter ces exercices plusieurs fois, jusqu'à ce qu'il puisse les réaliser de mémoire.

Problème I. — La Croix de six boules. — On dispose six boules sur les cases **35**, **43**, **44**, **45**, **46**, **55**; réduire à une boule au centre du solitaire.

On manœuvre successivement d'après la série des cinq coups :

$$\frac{45}{65}, \frac{43}{45}, \frac{35}{55}, \frac{65}{45}, \frac{46}{44}.$$

Problème II. — La Croix de neuf boules. — On dispose neuf boules sur les cases **24**, **34**, **42-46**, **54**, **64**; réduire à une boule au centre du solitaire.

La notation **42-46** veut dire que l'on place des boules sur les cases consécutives **42, 43, 44, 45, 46.** Pour abréger, nous nous servirons de cette notation tout aussi bien dans le sens vertical que dans le sens horizontal du solitaire. On a successivement

$$\frac{43}{41}, \frac{45}{43}, \frac{24}{44}, \frac{44}{42}, \frac{64}{44}, \frac{41}{43}, \frac{43}{45}, \frac{46}{44}.$$

Problème III. — Le Triangle. — Neuf boules en : **23, 33, 34, 43-45, 53, 54, 63.**

$$\frac{53}{55}, \frac{55}{35}, \frac{33}{53}, \frac{63}{43}, \frac{44}{42}, \frac{35}{33}, \frac{23}{43}, \frac{42}{44}.$$

Problème IV. — La Cheminée. — Onze boules en : **34-37, 45-47, 54-57.**

$$\frac{45}{25}, \frac{37}{35}, \frac{57}{37}, \frac{34}{36}, \frac{37}{35}, \frac{25}{45}, \frac{46}{66}, \frac{54}{56}, \frac{66}{46}, \frac{46}{44}.$$

Problème V. — Le Calvaire. — Quinze boules en : **25, 31, 32, 35, 41-47, 51, 52, 55, 65.**

$$\frac{31}{33}, \frac{51}{53}, \frac{43}{63}, \frac{41}{43}, \frac{33}{53}, \frac{63}{43}.$$

Après six coups, on retrouve la Croix de neuf boules du *Problème* II. On observera que cette croix est déplacée, car le centre se trouve ici sur la case **45.** On terminera sur cette case.

Problème VI. — La Pyramide. — Seize boules en : **14, 24, 25, 34-36, 44-47, 54-56, 64, 65, 74.**

$$\frac{55}{53}, \frac{74}{54}, \frac{53}{55}, \frac{55}{57}, \frac{57}{37}, \frac{35}{33}, \frac{14}{34}, \frac{33}{35}, \frac{36}{56}, \frac{44}{46}, \frac{56}{36}, \frac{25}{45}, \frac{37}{35}, \frac{35}{55}, \frac{65}{45}.$$

Problème VII. — La double Croix. — Vingt et une boules en : **14, 22, 24, 26, 33-35, 41-47, 53-55, 62, 64, 66, 74.**

$\frac{54}{52}, \frac{52}{32}, \frac{22}{42}, \frac{33}{53}, \frac{41}{43}, \frac{43}{63}, \frac{74}{54}, \frac{62}{64}, \frac{45}{65}, \frac{54}{74}, \frac{66}{64}, \frac{74}{54}, \frac{35}{33}, \frac{54}{34}, \frac{33}{35},$
$\frac{47}{45}, \frac{45}{25}, \frac{14}{34}, \frac{26}{24}, \frac{24}{44}.$

Problème VIII. — Les cinq Croix entrelacées. — Vingt et une boules en : **14, 23-25, 32, 34, 36, 41-47, 52, 54, 56, 63-65, 74.**

$\frac{64}{62}, \frac{44}{64}, \frac{74}{54}, \frac{46}{66}, \frac{66}{64}, \frac{64}{44}, \frac{44}{46}, \frac{47}{45}, \frac{24}{26}, \frac{26}{46}, \frac{46}{44}, \frac{44}{24}, \frac{14}{34}, \frac{42}{22}, \frac{22}{24},$
$\frac{24}{44}, \frac{44}{42}, \frac{41}{43}, \frac{62}{42}, \frac{42}{44}.$

Problème IX. — Le Pentagone. — Vingt-quatre boules en : **14, 23-25, 32-36, 42-47, 52-56, 63-65, 74.**

$\frac{53}{51}, \frac{32}{52}, \frac{51}{53}, \frac{44}{42}, \frac{23}{43}, \frac{42}{44}, \frac{63}{43}, \frac{25}{23}, \frac{45}{25}, \frac{43}{45}, \frac{55}{35}, \frac{35}{33}, \frac{33}{13}, \frac{13}{15}, \frac{15}{35},$
$\frac{35}{37}, \frac{37}{57}, \frac{57}{55}, \frac{55}{53}, \frac{74}{54}, \frac{53}{55}, \frac{65}{45}, \frac{46}{44}.$

Problème X. — Le Carré incliné. — Vingt-quatre boules en : **14, 23-25, 32-36, 41-43, 45-47, 52-56, 63-65, 74.**

$\frac{53}{51}, \frac{51}{31}, \frac{55}{75}, \frac{75}{73}, \frac{73}{53}, \frac{64}{44}, \frac{35}{37}, \frac{37}{57}, \frac{57}{55}, \frac{55}{35}, \frac{34}{36}, \frac{46}{26}, \frac{14}{34}, \frac{26}{24}, \frac{23}{25},$
$\frac{44}{24}, \frac{25}{23}, \frac{32}{34}, \frac{53}{33}, \frac{34}{32}, \frac{31}{33}, \frac{23}{43}, \frac{42}{44}.$

Problème XI. — L'Octogone. — Le solitaire est entièrement couvert, à l'exception des huit coins.

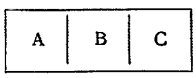
$\frac{53}{51}$, $\frac{32}{52}$, $\frac{51}{53}$, $\frac{54}{52}$, $\frac{74}{54}$, $\frac{44}{42}$, $\frac{52}{32}$, $\frac{22}{42}$, $\frac{41}{43}$, $\frac{24}{22}$, $\frac{43}{23}$, $\frac{22}{24}$, $\frac{62}{64}$, $\frac{64}{44}$, $\frac{34}{54}$, $\frac{14}{34}$, $\frac{66}{64}$, $\frac{64}{44}$, $\frac{56}{54}$, $\frac{35}{33}$, $\frac{54}{34}$, $\frac{33}{35}$, $\frac{35}{55}$, $\frac{47}{45}$, $\frac{55}{35}$, $\frac{25}{45}$, $\frac{26}{46}$, $\frac{46}{44}$.

Problème XII. — La triple Croix. — Le solitaire est entièrement couvert, à l'exception des cinq cases **22**, **66**, **26**, **62** et **44**.

$\frac{42}{62}$, $\frac{54}{52}$, $\frac{51}{53}$, $\frac{74}{54}$, $\frac{54}{52}$, $\frac{62}{42}$, $\frac{73}{53}$, $\frac{32}{52}$, $\frac{31}{51}$, $\frac{43}{63}$, $\frac{51}{53}$, $\frac{63}{43}$, $\frac{56}{54}$, $\frac{75}{55}$, $\frac{54}{56}$, $\frac{35}{55}$, $\frac{47}{45}$, $\frac{45}{65}$, $\frac{57}{55}$, $\frac{65}{45}$, $\frac{37}{35}$, $\frac{34}{32}$, $\frac{13}{33}$, $\frac{15}{13}$, $\frac{43}{23}$, $\frac{13}{33}$, $\frac{32}{34}$, $\frac{24}{26}$, $\frac{34}{36}$, $\frac{26}{46}$, $\frac{46}{44}$.

Il y a aussi lieu de s'exercer à réussir ces problèmes en sens inverse, en modifiant la règle du jeu conformément à l'idée émise par Leibniz, et reproduite au début de cette récréation. Considérons trois cases consécutives A, B, C, soit dans le sens horizontal (*fig.* 25), soit dans le sens vertical (*fig.* 26).

Fig. 25.



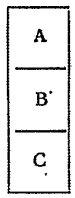


Fig. 26.

Supposons vides les cases B et C, et une boule en A. Passons la boule A en C, et plaçons une boule en B ; nous aurons ainsi un *coup additif*. Cela posé, on pourra reprendre les problèmes précédents. On place une boule sur la case du solitaire, occupée par

la dernière boule, et dont le numéro est le dénominateur de la fraction qui représente le dernier coup. On opère par des coups additifs dont la lecture se fait : 1° en renversant les deux termes de chaque fraction ; 2° en renversant l'ordre des fractions, la dernière devenant la première.

PROBLÈMES SUR LE SOLITAIRE DÉCENTRÉ.

Dans les problèmes suivants, nous prendrons pour figure initiale le solitaire de trente-sept cases, entièrement couvert, à l'exception de la case centrale **44**. On doit, après un certain nombre de coups, obtenir des figures convenues, formées par les boules restantes. La première série de fractions indique le nombre et la suite des coups soustractifs ; nous indiquons ensuite la position des boules restantes par des chiffres gras ou par les désignations que nous avons définies plus haut.

Problème XIII. — Le Chapelet.

$\frac{64}{44}, \frac{62}{64}, \frac{42}{62}, \frac{22}{42}, \frac{24}{22}, \frac{26}{24}, \frac{46}{26}, \frac{66}{46}, \frac{64}{66}, \frac{34}{54}, \frac{54}{52}, \frac{52}{32}, \frac{32}{34}, \frac{24}{44}.$

Il reste le pourtour et les boules **35**, **43** à **46**, **55** formant la *Croix de six boules.*

Problème XIV. — L'Équateur.

$\frac{42}{44}, \frac{22}{42}, \frac{24}{22}, \frac{63}{43}, \frac{33}{53}, \frac{65}{63}, \frac{62}{64}, \frac{42}{62}, \frac{26}{24}, \frac{46}{26}, \frac{34}{36}, \frac{55}{35}, \frac{36}{34}, \frac{53}{55}, \frac{56}{54}.$

Il reste le pourtour et la ligne horizontale **14** à **74**.

Problème XV. — La Croix et sa Couronne.

$\frac{24}{44}, \frac{36}{34}, \frac{55}{35}, \frac{25}{45}, \frac{33}{35}, \frac{53}{33}, \frac{23}{43}, \frac{56}{36}, \frac{36}{34}, \frac{73}{53}, \frac{65}{63}, \frac{53}{73}, \frac{51}{53}, \frac{32}{52}, \frac{53}{51}.$

Il reste le pourtour et cinq boules au centre.

Problème XVI. — La pleine Lune.

$\frac{64}{44}, \frac{52}{54}, \frac{33}{53}, \frac{54}{52}, \frac{66}{64}, \frac{46}{66}, \frac{44}{46}, \frac{24}{44}, \frac{26}{24}, \frac{46}{26}, \frac{14}{34}, \frac{22}{24}, \frac{34}{14}, \frac{42}{22}, \frac{62}{42}, \frac{64}{62}.$

Il reste le pourtour et les quatre boules **42, 44, 35, 55.**

Problème XVII. — La Croix de Malte.

$\frac{24}{44}, \frac{54}{34}, \frac{74}{54}, \frac{42}{44}, \frac{44}{64}, \frac{46}{44}, \frac{34}{54}, \frac{54}{74}, \frac{62}{42}, \frac{63}{43}, \frac{32}{34}, \frac{22}{24}, \frac{25}{45}, \frac{26}{46}, \frac{56}{54}, \frac{66}{64}.$

Il reste les boules des fronts, de la ligne et de la colonne moyennes, à l'exception du centre.

Problème XVIII. — Quatre cavaliers cernés par seize soldats.

$\frac{42}{44}, \frac{45}{43}, \frac{64}{44}, \frac{43}{45}, \frac{66}{64}, \frac{46}{66}, \frac{26}{46}, \frac{46}{44}, \frac{24}{26}, \frac{44}{24}, \frac{22}{42}, \frac{24}{22}, \frac{41}{43}, \frac{62}{42}, \frac{43}{41}, \frac{64}{62}.$

Il reste le pourtour et les quatre boules **33, 53, 35, 55** représentant les cavaliers, qui n'ont pas bougé pendant la manœuvre.

Problème XIX. — Trois cavaliers cernés par seize soldats.

$$\frac{64}{44}, \frac{34}{54}, \frac{42}{44}, \frac{44}{64}, \frac{36}{34}, \frac{56}{36}, \frac{26}{46}, \frac{46}{44}, \frac{65}{45}, \frac{24}{26}, \text{etc.}$$

Les huit derniers coups sont semblables aux huit derniers du problème précédent. Il reste le pourtour et les trois boules **33, 53, 45** représentant les cavaliers

Problème XX. — Adam et Ève dans le paradis terrestre.

$\frac{46}{44}, \frac{43}{45}, \frac{23}{43}, \frac{25}{23}, \frac{45}{25}, \frac{42}{44}, \frac{63}{43}, \frac{43}{45}, \frac{65}{63}, \frac{45}{65}, \frac{22}{42}, \frac{26}{24}, \frac{66}{46}, \frac{62}{64}, \frac{42}{62}, \frac{24}{22},$
$\frac{46}{26}, \frac{64}{66}.$

Il reste le pourtour et les deux boules **34** et **54**, représentant Adam et Ève, qui n'ont pas bougé pendant la manœuvre.

Problème XXI. — Le Lecteur au milieu de son auditoire.— On commence par le problème du chapelet (*Problème* XIII), et l'on termine par le *Problème* I. Il reste alors le pourtour et le centre.

Problème XXII. — Le Jugement dernier.

$\frac{24}{44}, \frac{32}{34}, \frac{52}{32}, \frac{35}{33}, \frac{32}{34}, \frac{55}{35}, \frac{57}{55}, \frac{65}{45}, \frac{63}{65}, \frac{43}{63}, \frac{36}{56}, \frac{35}{55}, \frac{55}{57}, \frac{13}{33}, \frac{15}{13}, \frac{33}{35},$
$\frac{35}{15}, \frac{73}{53}, \frac{75}{73}, \frac{53}{55}, \frac{55}{75}.$

Après le dernier coup, il reste la boule centrale **44** et les deux parties du pourtour, représentant les *bons et les méchants*, séparés par les cases vides **14** et **74**.

Problème XXIII. — Le grand Bol.

$\frac{24}{44}, \frac{32}{34}, \frac{53}{33}, \frac{34}{32}, \frac{31}{33}, \frac{52}{32}, \frac{33}{31}, \frac{45}{43}, \frac{64}{44}, \frac{43}{45}, \frac{56}{54}, \frac{35}{55}, \frac{54}{56}, \frac{66}{64}, \frac{63}{65}, \frac{26}{24},$
$\frac{23}{25}, \frac{37}{35}, \frac{47}{45}, \frac{57}{55}.$

Il reste la ligne **15** à **75**, et le pourtour de **15** à **41** et de **41** à **75**.

Problème XXIV. — Les quatre Évangélistes et les douze Apôtres.

$\frac{42}{44}, \frac{62}{42}, \frac{64}{62}, \frac{44}{64}, \frac{41}{43}, \frac{74}{54}, \frac{46}{44}, \frac{44}{64}, \frac{66}{46}, \frac{64}{66}, \frac{47}{45}, \frac{24}{44}, \frac{44}{46}, \frac{26}{24}, \frac{46}{26}, \frac{14}{34}, \frac{22}{24}, \frac{24}{44}, \frac{44}{42}, \frac{42}{22}.$

Il reste les boules du pourtour, à l'exception des quatre boules **14, 41, 47, 74**, ce qui représente les douze Apôtres, et en plus les boules **33, 35, 53, 55**, qui représentent les Évangélistes.

Problème XXV. — La Trinité et les douze Apôtres.

$\frac{42}{44}, \frac{45}{43}, \frac{24}{44}, \frac{43}{45}, \frac{64}{44}, \frac{56}{54}, \frac{54}{34}, \frac{36}{56}, \frac{34}{36}, \frac{15}{35}, \frac{57}{55}, \frac{37}{57}, \frac{35}{37}, \frac{13}{15}, \frac{33}{13}, \frac{31}{33}, \frac{51}{31}, \frac{53}{51}, \frac{73}{53}, \frac{75}{73}, \frac{55}{75}.$

Il reste douze boules du pourtour, comme dans le problème précédent, et, en plus, les trois boules **33, 53, 45**.

Problème XXVI. — Jésus et les douze Apôtres.

$\frac{42}{44}, \frac{63}{43}, \frac{51}{53}, \frac{31}{51}, \frac{33}{31}, \frac{53}{33}, \frac{23}{43}, \frac{35}{33}, \frac{33}{53}, \frac{14}{34}, \frac{44}{24}, \frac{46}{44}, \frac{26}{46}, \frac{24}{26}, \frac{47}{45}, \frac{66}{46}, \frac{54}{56}, \frac{46}{66}, \frac{74}{54}, \frac{75}{55}, \frac{45}{65}, \frac{53}{55}, \frac{55}{75}.$

Il reste douze boules du pourtour, comme dans les deux problèmes précédents, et, en plus, la boule centrale **44**.

Problème XXVII. — Le Calice.

$\frac{46}{44}, \frac{65}{45}, \frac{57}{55}, \frac{37}{57}, \frac{54}{56}, \frac{57}{55}, \frac{45}{65}, \frac{52}{54}, \frac{32}{52}, \frac{34}{32}, \frac{36}{34}, \frac{15}{35}, \frac{22}{42}, \frac{13}{33}, \frac{34}{32}, \frac{14}{34}, \frac{75}{55}, \frac{55}{53}, \frac{74}{54}, \frac{53}{55}, \frac{73}{53}, \frac{52}{54}, \frac{32}{52}, \frac{62}{42}.$

Il reste douze boules **26**, **31**, **34**, **35**, **41-44**, **51**, **54**, **55**, **66**.

Problème XXVIII. — La Trinité.

$\frac{46}{44}, \frac{25}{45}, \frac{37}{35}, \frac{45}{25}, \frac{15}{35}, \frac{34}{36}, \frac{26}{46}, \frac{54}{34}, \frac{65}{45}, \frac{57}{55}, \frac{45}{65}, \frac{75}{55}, \frac{74}{54}, \frac{54}{56}, \frac{47}{45},$
$\frac{66}{46}, \frac{52}{54}, \frac{32}{52}, \frac{34}{32}, \frac{14}{34}, \frac{62}{42}, \frac{42}{44}, \frac{73}{53}, \frac{54}{52}, \frac{22}{42}, \frac{13}{33}, \frac{34}{32}, \frac{45}{43}, \frac{31}{33}, \frac{43}{23},$
$\frac{41}{43}, \frac{51}{53}, \frac{43}{63}.$

Il reste les trois boules **23**, **63** et **46**.

Problème XXIX. — Les deux Pôles. — On joue vingt coups comme dans le problème précédent, puis on fait :

$\frac{45}{47}, \frac{73}{53}, \frac{62}{42}, \frac{54}{52}, \frac{51}{53}, \frac{53}{33}, \frac{41}{43}, \frac{22}{42}, \frac{34}{32}, \frac{13}{33}, \frac{43}{23}, \frac{31}{33}, \frac{23}{43}, \frac{43}{41}.$

Il reste alors les deux boules **41** et **47**.

Problème XXX. — Le Corsaire. — On couvre le solitaire, on enlève la boule **51**, on fait ensuite :

$\frac{53}{51}, \frac{73}{53}, \frac{65}{63}, \frac{62}{64}, \frac{75}{73}, \frac{54}{52}, \frac{51}{53}, \frac{43}{63}, \frac{73}{53}, \frac{23}{43}, \frac{25}{23}, \frac{45}{25}, \frac{47}{45}, \frac{31}{33}, \frac{33}{35},$
$\frac{13}{33}, \frac{43}{23}, \frac{22}{24}, \frac{14}{34}, \frac{35}{33}, \frac{15}{35}, \frac{45}{25}, \frac{26}{24}, \frac{37}{35}, \frac{66}{46}.$

Puis la boule **41**, qui représente le Corsaire, prend successivement les neuf boules **42**, **33**, **24**, **35**, **55**, **64**, **53**, **44**, **46**, et vient se placer en **47**, où elle est prise par la boule **57** qui vient en **37**.

LES LETTRES EN BOULES.

Nous venons de donner les solutions de trente problèmes gradués sur le jeu du solitaire. Il paraît que l'ouvrier typographe chargé de la composition de l'article publié dans la *Revue Scientifique* n'était pas très content d'avoir à manier une si grande quantité de chiffres et de fractions. Ce n'était pas l'avis de mon fils Paul, qui n'a pas six ans, mais qui sait manipuler les numéros avec une grande dextérité; il y a déjà longtemps qu'il ne joue plus au loto, d'abord parce que c'est un jeu de hasard, ensuite parce que ce jeu est ennuyeux. C'est lui qui a corrigé les épreuves de l'article en question, assisté de sa grande sœur Madeleine, qui n'a pas sept ans. J'avais dessiné sur une feuille de carton un solitaire numéroté; puis j'avais expliqué à tous deux les notations si simples du jeu du solitaire. Pendant que l'un appelait les coups successifs, l'autre les réalisait sur l'échiquier; je n'ai donc eu à revoir qu'un petit nombre de problèmes, c'est-à-dire seulement ceux qui les avaient arrêtés.

Aussi, pour les récompenser, je leur ai promis d'écrire leurs noms en *lettres de boules* sur le jeu du solitaire; dans cette intention, j'ai réuni quelques nouveaux problèmes que l'on déduit du solitaire complet, et qui se terminent par un ensemble de boules représentant aussi bien que possible les lettres de l'alphabet qui servent à former leurs noms.

LA RÉCRÉATION DE PAUL [1].

Cette récréation se compose de quatre parties successives qui correspondent aux quatre lettres P, A, U, L.

LA LETTRE P. — Du solitaire complet on enlève la boule **44**; puis on joue les vingt-trois coups suivants :

$\frac{42}{44}, \frac{63}{43}, \frac{51}{53}, \frac{43}{63}, \frac{73}{53}, \frac{54}{52}, \frac{62}{42}, \frac{41}{43}, \frac{74}{54}, \frac{33}{53}, \frac{54}{52}, \frac{22}{42}, \frac{52}{32}, \frac{56}{54},$
$\frac{36}{56}, \frac{34}{36}, \frac{75}{55}, \frac{45}{65}, \frac{13}{33}, \frac{14}{34}, \frac{15}{35}, \frac{26}{46}, \frac{56}{36}.$

Il reste les treize boules **31-37, 44, 47, 54, 57, 65, 66.**

LA LETTRE A. — Du solitaire complet on enlève la boule **44**; puis on joue les vingt-six coups suivants :

$\frac{64}{44}, \frac{56}{54}, \frac{35}{55}, \frac{54}{56}, \frac{66}{64}, \frac{57}{55}, \frac{47}{45}, \frac{37}{35}, \frac{45}{65}, \frac{34}{36}, \frac{26}{46}, \frac{15}{35}, \frac{75}{55}, \frac{14}{34},$
$\frac{74}{54}, \frac{22}{24}, \frac{43}{23}, \frac{31}{33}, \frac{23}{43}, \frac{53}{33}, \frac{41}{43}, \frac{33}{53}, \frac{63}{43}, \frac{51}{53}, \frac{43}{63}, \frac{62}{64}.$

Il reste les dix boules **13,73,24-64,35,55,46.**

LA LETTRE U. — Du solitaire complet on enlève la boule **64**; puis on joue les vingt-quatre coups suivants :

$\frac{66}{64}, \frac{45}{65}, \frac{57}{55}, \frac{25}{45}, \frac{37}{35}, \frac{45}{25}, \frac{47}{45}, \frac{54}{56}, \frac{52}{54}, \frac{32}{52}, \frac{34}{32}, \frac{75}{55}, \frac{73}{53}, \frac{62}{42},$
$\frac{54}{52}, \frac{74}{54}, \frac{51}{53}, \frac{32}{52}, \frac{13}{33}, \frac{43}{23}, \frac{45}{43}, \frac{15}{13}, \frac{13}{33}, \frac{43}{23}.$

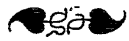
[1] Nous recommandons ces exercices aux pères de famille qui n'ont malheureusement pas toujours le temps d'être dérangés de leurs travaux par leurs enfants.

Il reste les douze boules **22-26, 31, 41, 52-56.**

La lettre L.— Du solitaire complet on enlève la boule **33**; puis on joue les vingt-sept coups suivants :

$\frac{21}{33}$, $\frac{34}{32}$, $\frac{51}{31}$, $\frac{31}{33}$, $\frac{36}{34}$, $\frac{34}{32}$, $\frac{56}{36}$, $\frac{54}{56}$, $\frac{52}{54}$, $\frac{73}{53}$, $\frac{54}{52}$, $\frac{74}{54}$, $\frac{57}{55}$, $\frac{54}{56}$, $\frac{66}{46}$, $\frac{75}{55}$, $\frac{55}{35}$, $\frac{43}{45}$, $\frac{36}{34}$, $\frac{15}{35}$, $\frac{13}{15}$, $\frac{45}{25}$, $\frac{15}{35}$, $\frac{34}{36}$, $\frac{37}{35}$, $\frac{47}{45}$, $\frac{45}{25}$.

Il reste les neuf boules **22-26, 32-62.**



LA RÉCRÉATION DE MADELEINE.

Cette récréation se compose de cinq parties nouvelles qui correspondent aux lettres M, D, E, I, N.

La lettre M. — Du solitaire complet on enlève les boules **33** et **53**; puis on joue les vingt-deux coups suivants :

$\frac{55}{53}$, $\frac{13}{33}$, $\frac{43}{23}$, $\frac{63}{43}$, $\frac{51}{53}$, $\frac{43}{63}$, $\frac{35}{33}$, $\frac{23}{43}$, $\frac{31}{33}$, $\frac{43}{23}$, $\frac{41}{43}$, $\frac{15}{13}$, $\frac{13}{33}$, $\frac{43}{23}$, $\frac{75}{55}$, $\frac{73}{75}$, $\frac{45}{65}$, $\frac{75}{55}$, $\frac{47}{45}$, $\frac{45}{65}$, $\frac{37}{35}$, $\frac{57}{55}$.

Il reste les treize boules **22-26, 35, 44, 55, 62-66.**

La lettre D. — Du solitaire complet on enlève la boule **44**, puis on joue les vingt coups suivants :

$\frac{42}{44}$, $\frac{23}{43}$, $\frac{35}{33}$, $\frac{43}{23}$, $\frac{54}{34}$, $\frac{46}{44}$, $\frac{34}{54}$, $\frac{65}{45}$, $\frac{63}{65}$, $\frac{75}{55}$, $\frac{45}{65}$, $\frac{53}{55}$, $\frac{55}{75}$, $\frac{22}{42}$, $\frac{52}{32}$, $\frac{13}{33}$, $\frac{14}{34}$, $\frac{15}{35}$, $\frac{26}{46}$, $\frac{56}{36}$.

Il reste les seize boules 31-37, 41, 47, 51, 57, 62, 66, 73-75.

La lettre E. — Du solitaire complet on enlève la boule **44**; puis on joue les vingt-trois coups suivants :

$\frac{42}{44}$, $\frac{62}{42}$, $\frac{54}{52}$, $\frac{73}{53}$, $\frac{52}{54}$, $\frac{41}{43}$, $\frac{22}{42}$, $\frac{43}{41}$, $\frac{34}{32}$, $\frac{54}{34}$, $\frac{56}{54}$, $\frac{75}{55}$, $\frac{54}{56}$, $\frac{74}{54}$, $\frac{46}{44}$, $\frac{26}{46}$, $\frac{34}{36}$, $\frac{13}{33}$, $\frac{14}{34}$, $\frac{15}{35}$, $\frac{47}{45}$, $\frac{66}{46}$, $\frac{45}{47}$.

Il reste les treize boules 31-37, 41, 44, 47, 51, 54, 57.

La lettre I. — Du solitaire complet on enlève les boules **13** et **73**; puis on joue les vingt-quatre coups suivants :

$\frac{75}{73}$, $\frac{54}{74}$, $\frac{66}{64}$, $\frac{74}{54}$, $\frac{15}{13}$, $\frac{34}{14}$, $\frac{26}{24}$, $\frac{14}{34}$, $\frac{46}{66}$, $\frac{54}{56}$, $\frac{66}{46}$, $\frac{52}{54}$, $\frac{32}{52}$, $\frac{34}{32}$, $\frac{36}{34}$, $\frac{13}{33}$, $\frac{22}{42}$, $\frac{34}{32}$, $\frac{51}{53}$, $\frac{32}{52}$, $\frac{53}{51}$, $\frac{73}{53}$, $\frac{54}{52}$, $\frac{62}{42}$.

Il reste les onze boules 31, 37, 41-47, 51, 57.

La lettre N. — Du solitaire complet on enlève les boules **52** et **33**; puis on joue les vingt-deux coups suivants :

$\frac{54}{52}$, $\frac{56}{54}$, $\frac{75}{55}$, $\frac{54}{56}$, $\frac{57}{55}$, $\frac{45}{65}$, $\frac{25}{45}$, $\frac{37}{35}$, $\frac{45}{25}$, $\frac{47}{45}$, $\frac{73}{75}$, $\frac{75}{55}$, $\frac{45}{65}$, $\frac{13}{33}$, $\frac{43}{23}$, $\frac{15}{13}$, $\frac{13}{33}$, $\frac{33}{35}$, $\frac{31}{33}$, $\frac{41}{43}$, $\frac{43}{23}$, $\frac{51}{53}$.

Il reste les treize boules 22-26, 35, 44, 53, 62-66.

LES RÉUSSITES DU SOLITAIRE A 37 CASES.

Le problème que l'on résout le plus communément sur le solitaire s'appelle *réussite;* il consiste à enlever une boule du solitaire complet, puis on doit réduire le solitaire à une seule boule, en suivant la règle du jeu. Nous désignerons alors sous le nom de *case initiale* la première et unique case vide, et par *case finale* ou *terminale* la dernière et unique case pleine. Nous avons déjà obtenu la réussite ayant **51** pour case initiale et **37** pour case finale, dans la solution du problème du *Corsaire.* Nous donnerons une seconde réussite, en partant de la case **73**; le tableau successif des trente-cinq coups est le suivant :

$$\frac{53}{73}, \frac{51}{53}, \frac{43}{63}, \frac{73}{53}, \frac{23}{43}, \frac{31}{33}, \frac{43}{23}, \frac{13}{33}, \frac{45}{43}, \frac{65}{45}, \frac{57}{55}, \frac{45}{65},$$
$$\frac{75}{55}, \frac{25}{45}, \frac{37}{35}, \frac{45}{25}, \frac{15}{35}, \frac{43}{63}, \frac{64}{44}, \frac{62}{64}, \frac{74}{54}, \frac{41}{43}, \frac{34}{36}, \frac{14}{34},$$
$$\frac{47}{45}, \frac{26}{46}, \frac{45}{47}, \frac{54}{56}, \frac{66}{46}, \frac{43}{23}, \frac{22}{24}, \frac{47}{45}, \frac{45}{43}, \frac{24}{44}, \frac{44}{42} \text{ ou } \frac{43}{45}.$$

On retient assez facilement cette marche en se fixant dans l'esprit les figures représentant l'état du solitaire après le 17e coup, et après le 26e.

Quant au dernier coup, il est possible de deux façons différentes, et la *case finale* est **42** dans le premier cas, et **45** dans le second. Cette observation sera très utile dans la suite.

DE LA SYMÉTRIE HORIZONTALE.

Au lieu de prendre 73 pour case initiale, on pourrait prendre une autre case, et il y aurait ainsi lieu de considérer les réussites qui correspondent à toutes les cases du solitaire, prises successivement pour case initiale. Mais la forme régulière du solitaire permet de réduire considérablement ces problèmes, ainsi qu'on va le voir.

Si l'on prend 75 pour case initiale, on observera que les cases 73 et 75 sont placées symétriquement par rapport à la ligne moyenne 14-74 qui est un *axe de symétrie* de la figure formée par les cases du solitaire. Dans le cas général, les premiers chiffres des notations de deux cases symétriques par rapport à la ligne moyenne sont égaux; ainsi les cases symétriques 73 et 75, 32 et 36, etc., ont le même premier chiffre. Quant aux seconds chiffres, ils ont constamment la même somme égale à *huit*.

Par conséquent, pour résoudre le problème de la réussite, qui convient à la case initiale 75, il suffira de reprendre le tableau précédent, en conservant l'ordre et la disposition des fractions; on conservera encore le premier chiffre de chacun des termes de la fraction, mais on remplacera le second chiffre de chaque terme par son complément à 8; ainsi, pour le second chiffre, on remplacera

1 par 7, 2 par 6, 3 par 5, 4 par 4,

et réciproquement. Le tableau des premiers coups de la réussite 75 sera donc

$$\frac{55}{75}, \frac{57}{55}, \frac{45}{65}, \frac{75}{55}, \ldots.$$

DE LA SYMÉTRIE VERTICALE.

Le solitaire est encore symétrique par rapport à la colonne moyenne **41-47**; et ainsi les cases **13** et **73** sont symétriques. Pour deux telles cases, le second chiffre de la notation est le même, et la somme des deux premiers chiffres est constamment égale à *huit*. Par conséquent, on déduira le tableau de la réussite **13** de celui de la réussite **73**, en conservant l'ordre des fractions donnant les coups et le second chiffre des termes, et en remplaçant le premier chiffre de chaque terme par son complément à *huit*. Ainsi, par exemple, la réussite de case initiale **13** commence par

$$\frac{33}{13}, \frac{31}{33}, \frac{43}{23}, \frac{13}{33}, \ldots.$$

DE LA SYMÉTRIE CENTRALE.

On peut déduire la solution de la réussite de case initiale **15** de l'une des réussites ayant pour case initiale **13** ou **75**, soit par symétrie horizontale, soit par symétrie verticale. Mais on peut opérer plus rapidement, en remplaçant, dans le tableau de la succession des coups de la réussite de case initiale **73**, chacun des chiffres par son complément à *huit*. On fait ainsi l'application de ce théorème de Géométrie : *Lorsqu'une figure est symétrique par rapport à deux axes perpendiculaires, elle est symétrique par rapport au point d'intersection des axes.* Ainsi le solitaire possède la *symétrie centrale*, c'est-à-dire que toutes les cases sont opposées deux à deux, et également distantes de la case

centrale **44** ([1]). Ainsi, les premiers coups de la réussite **15** déduits centralement de la réussite **73** sont les suivants :

$$\frac{35}{15}, \frac{37}{35}, \frac{45}{25}, \frac{15}{35}, \ldots.$$

DE LA SYMÉTRIE INCLINÉE.

Les cases du solitaire octogone sont encore placées symétriquement par rapport à la ligne diagonale **22-66**. Pour deux cases symétriques de cette manière, les notations sont telles que chacune d'elles est égale à la notation renversée de l'autre. Par conséquent, on déduira la solution de la réussite **37** de celle de la réussite **73**, en renversant l'ordre des chiffres de chacun des termes des fractions qui indiquent la succession des coups.

Ainsi les premiers coups de la réussite **37** déduits de la réussite **73** sont :

$$\frac{35}{37}, \frac{15}{35}, \frac{34}{36}, \frac{37}{35}, \ldots.$$

En résumé, il résulte de ces considérations de symétrie, que l'étude des réussites du solitaire de trente-sept cases ne doit être faite que pour une seule des cases d'un même groupe symétrique.

([1]) Pour se rapprocher des conventions adoptées en Géométrie analytique, on aurait dû désigner la case **44** par **00**, et la prendre pour origine des coordonnées. On aurait désigné toutes les cases par deux chiffres, de **0** à **3**, en indiquant les cases de coordonnées négatives par le signe —, placé au-dessus du chiffre représentant la coordonnée négative, comme dans l'emploi de la caractéristique négative des logarithmes. On peut encore désigner les coordonnées négatives par des chiffres accentués ; c'est ainsi que l'a fait Reiss, dans le Mémoire que nous citons plus loin. Mais sa notation est un peu confuse ; c'est pourquoi nous préférons la notation actuelle.

D'après cela, on classera les cases du solitaire en huit groupes que nous indiquons dans le tableau suivant :

Tableau des groupes de cases symétriques.

GROUPES.	CASES.
I*	44.
II*	14, 41, 47, 74.
III*	22, 26, 62, 66.
IV	24, 42, 46, 64.
V*	33, 35, 53, 55.
VI	34, 43, 45, 54.
VII	13, 15, 31, 37, 51, 57, 73, 75.
VIII*	23, 25, 32, 36, 52, 56, 63, 65.

Il suffit donc d'étudier le problème des réussites pour l'une quelconque des cases de chaque groupe. Mais nous démontrerons plus loin, dans la théorie des *impossibilités du solitaire général*, que la réussite proposée est impossible pour toutes les cases appartenant aux groupes marqués d'un astérisque, dans le tableau précédent. Il ne nous reste donc que l'étude des groupes IV et VI, dans lesquels nous choisirons respectivement pour cases initiales celles qui ont pour notation 42 et 45.

PROCÉDÉ GÉNÉRAL DE RÉCIPROCITÉ.

Nous avons donné plus haut la solution du solitaire pour la case initiale 73, et nous avons obtenu la boule finale 42. Par conséquent on peut, par une marche renversée de coups *additifs*, remplir le solitaire, en prenant pour case initiale 42, mais la case finale 73 restera vide. Nous avons vu que l'on obtient l'écriture de cette solution en coups additifs : 1° en renversant l'ordre des fractions ; 2° en échangeant les termes de chaque fraction.

Cela posé, considérons deux *solitaires complémentaires*, c'est-à-dire tels que les cases *pleines* de l'un correspondent toujours aux cases *vides* de l'autre, et réciproquement ; alors les coups *additifs* de l'un correspondent aux coups *soustractifs* de l'autre.

Par conséquent, si l'on part d'une boule initiale 42, et qu'on remplisse le solitaire par coups additifs, à l'exception de la case 73, on obtient une réussite ordinaire, par coups soustractifs, sur le solitaire complémentaire ne contenant que la case vide 42 ; il reste la boule finale 73.

Pour déduire immédiatement la réussite de case initiale 42 et de boule finale 73, de la réussite de case initiale 73 et de boule finale 42, il suffit de renverser, dans la solution de cette dernière, l'ordre des fractions, mais *sans renverser* les termes de chacune d'elles. Ainsi, la réussite de case initiale 42, déduite de la réussite 73, sera

$$\frac{44}{42}, \frac{24}{44}, \frac{45}{43}, \frac{47}{45}, \ldots, \frac{51}{53}, \frac{53}{73}.$$

C'est en cela que consiste le *procédé général de réciprocité*.

PROCÉDÉ GÉNÉRAL D'ÉCHANGE.

Nous avons vu que la réussite de case initiale **73** peut se terminer indifféremment par la case **42** ou par la case **45**. Par conséquent, la réussite de case initiale **45** a pour solution

$$\frac{43}{45}, \frac{24}{44}, \frac{45}{43}, \frac{47}{45}, \ldots, \frac{51}{53}, \frac{53}{73}.$$

Elle ne diffère de la précédente que par le premier coup.

En général, désignons par a, b, c, d quatre cases consécutives, et supposons que la réussite se termine par le coup $\frac{c}{a}$; on pourra tout aussi bien terminer par le coup $\frac{b}{d}$. De même, si une réussite commence par le coup $\frac{C}{A}$, sur l'ensemble de quatre cases consécutives A, B, C, D, on pourra échanger la case A par la case D, et la réussite ne différera de la précédente que par le premier coup $\frac{B}{D}$, au lieu de $\frac{C}{A}$. C'est en cela que consiste le *procédé général d'échange* des cases initiales ou des cases terminales.

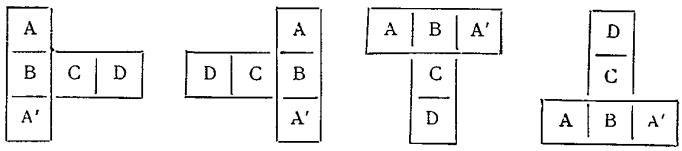
Il résulte de ces considérations de symétrie, de réciprocité et d'échange, que nous avons donné les réussites possibles du solitaire de trente-sept cases, en prenant successivement pour case initiale toutes les cases convenables.

COUPS TRIPLES DU SOLITAIRE ACCÉLÉRÉ.

On peut, dans un grand nombre de problèmes, accélérer la marche du solitaire par le *coup triple* imaginé par M. Hermary.

Considérons l'ensemble formé par trois cases consécutives pleines B, C, D, et par deux autres cases A et A′, dont l'une pleine et l'autre vide, conformément à l'une des quatre dispositions que nous avons représentées dans les *fig.* 27, 28, 29 et 30

Fig. 27. Fig. 28. Fig. 29. Fig. 30.



Si la case A′ est vide et les quatre autres pleines, on fera successivement les trois coups

$$\frac{A}{A'}, \frac{D}{B}, \frac{A'}{A};$$

si la case A est vide, et les quatre autres pleines, on fera

$$\frac{A'}{A}, \frac{D}{B}, \frac{A}{A'}.$$

Dans ces deux cas, les trois boules consécutives B, C, D ont disparu, pendant que la quatrième est revenue à sa place. On peut effectuer cette manœuvre d'un seul coup, en enlevant les trois boules B, C, D, sans toucher à A ou à A′. Nous désignerons ce coup triple par l'une des fractions $\frac{B}{D}$ ou $\frac{D}{B}$, mais en chiffres gras. Nous donnerons quelques exemples de ce procédé.

Exemple I. — *Marche accélérée du Lecteur au milieu de son auditoire.* — On enlève d'abord du solitaire complet la boule centrale **44**, et par un coup simple $\frac{64}{44}$, on enlève la boule **54**; on

effectue ensuite les six coups triples :

$$\frac{43}{63}, \frac{45}{65}, \frac{32}{52}, \frac{36}{56}, \frac{33}{35}, \frac{23}{25}.$$

Comparer cette solution, due à M. Hermary, avec celle que nous avons donnée dans le *Problème* XXI.

Exemple II. — *Marche accélérée des douze Apôtres.* — On enlève la boule centrale 44, puis on fait les huit coups triples :

$$\frac{34}{36}, \frac{24}{26}, \frac{45}{65}, \frac{46}{66}, \frac{54}{52}, \frac{64}{62}, \frac{43}{23}, \frac{42}{22}.$$

Exemple III. — *Le Carré de vingt-cinq boules.* — On dispose sur le solitaire vingt-cinq boules en carré ayant pour sommets les cases 22, 26, 62, 66.

On réduit la figure à une seule boule au centre par les huit coups triples :

$$\frac{24}{26}, \frac{34}{36}, \frac{46}{66}, \frac{45}{65}, \frac{64}{62}, \frac{54}{52}, \frac{42}{22}, \frac{43}{23}.$$

Cette marche est peu différente de la précédente; chaque paire de coups triples est intervertie.

Exemple IV. — *Le Tricolet.* — Du solitaire complet on enlève la boule 44; puis on fait successivement quatre groupes de coups superposables, en tournant à chaque fois le solitaire d'un quart de tour; ces groupes sont formés d'un coup triple, marqué d'un astérisque, suivi de deux coups simples :

$$\frac{25^*}{45}, \frac{47}{45}, \frac{26}{46}; \frac{32^*}{34}, \frac{14}{34}, \frac{22}{24}; \frac{63^*}{43}, \frac{41}{43}, \frac{62}{42}; \frac{56^*}{54}, \frac{74}{54}, \frac{66}{64}.$$

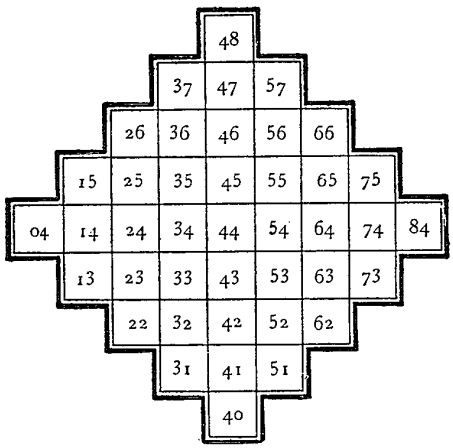
Il reste seize boules que l'on ramène à douze en jouant les quatre coups simples

$$\frac{45}{47},\ \frac{34}{14},\ \frac{43}{41},\ \frac{54}{74}\ (^1).$$

Exemple V. — *Réussite sur le solitaire de quarante et une cases.*

Le solitaire de quarante et une cases a la forme représentée dans la *fig.* 31.

Fig. 31.



C'est le solitaire ordinaire bordé des quatre cases 04, 40, 48 et 84. Nous donnerons le tableau des coups de la réussite que l'on obtient en prenant 46 pour case initiale. Ce tableau renferme un

(1) *Encyclopédie méthodique. — Dictionnaire des jeux mathématiques.* Paris, an VII, p. 202.

mélange de coups simples et de coups triples :

$$\frac{66}{46}, \frac{54}{56}, \frac{75}{55}, \frac{55^*}{57}, \frac{46^*}{48}, \frac{64^*}{84}, \frac{34}{54}, \frac{15^*}{35}, \frac{04^*}{24}, \frac{37}{35}, \frac{45}{25}, \frac{26}{24}, \frac{23}{25}, \frac{43}{23}, \frac{22}{24},$$
$$\frac{25}{23}, \frac{13}{33}, \frac{51^*}{53}, \frac{41}{43}, \frac{31^*}{33}, \frac{73}{53}, \frac{54}{52}, \frac{62}{42}, \frac{43}{41}, \frac{40}{42}.$$

Cette réussite est due à M. Hermary.

Remarque. — Dans les solutions des trente premiers problèmes, on rencontre un assez grand nombre de coups triples. Ainsi dans le *grand Bol* (*Prob.* XXIII), le premier coup est suivi de quatre coups triples.

EXTENSIONS DU SOLITAIRE ET DE LA RÈGLE DU JEU.

Pour démontrer l'impossibilité de certains problèmes du solitaire, tels que les réussites, on se sert d'un procédé fort ingénieux, imaginé par Reiss, et perfectionné par M. Hermary [1]. On facilite le jeu : 1° par l'extension de la règle ordinaire; 2° par l'extension indéfinie des limites du solitaire; on prouve ensuite

[1] Reiss. — Beiträge zur Theorie des Solitär-Spiels (*Journal de Crelle*, t. LIV. Berlin).

Ruchonnet. — *Théorie du Solitaire*, par feu le Dr Reiss; librement traduit de l'allemand (*Nouvelle correspondance mathématique*, t. III, p. 234. Bruxelles, 1877).

Hermary. — *Sur le jeu du Solitaire*. Association française pour l'avancement des sciences. Congrès de Montpellier, 1879.

Nous pensons que ce procédé appartient réellement au docteur Reiss; cependant nous devons dire que la théorie des impossibilités du solitaire a des origines beaucoup plus anciennes. En effet, dans le tome Ier du *Bulletin des Sciences* de Férussac (p. 137), on trouve le passage suivant, qui correspond à une autre notation du solitaire : « Si, dans le solitaire octogone

que, même dans ce cas plus général, tout en profitant de la règle étendue, le problème proposé n'est pas possible. Par conséquent le problème proposé sera impossible, à plus forte raison, dans le cas du solitaire restreint.

Extension I. — Le solitaire est supposé indéfini dans tous les sens.

Extension II. — On a la faculté de jouer successivement, et dans un ordre quelconque, des coups additifs et soustractifs.

Extension III. — On peut placer plusieurs boules à la fois, sur la même case, par des coups additifs. Si l'on veut suivre le raisonnement, *la boule à la main*, il suffira de prendre un carton quadrillé, ainsi que nous l'avons déjà dit, et des pions comme ceux que l'on emploie au jeu de dames.

Extension IV. — Une case vide peut être garnie par provision d'une ou de plusieurs boules en nombre quelconque; en d'autres termes, une case vide peut emprunter des boules, directement, sans l'intermédiaire des coups additifs, à la condition de pouvoir les rendre à la fin de la partie.

Ainsi on peut, par exemple, sur une case vide placer une boule directement, continuer l'application des coups additifs ou soustractifs, et retirer ensuite, après la manœuvre, la boule ajoutée quand elle est revenue sur cette case (¹).

à 37 fiches, pour commencer on laisse vide l'un des trous 2, 4, 14, 20, 32, il est impossible que la dernière fiche reste dans l'un d'eux. »

Ce théorème paraît être une conséquence des théorèmes VII, VIII, IX et X, que nous démontrons plus loin. Il est extrait d'un ouvrage que nous n'avons pas eu le loisir de consulter, et intitulé : *Natürliche Magazine*, de Christ Benedict Funck. Berlin, 1783; in-8°.

(¹) Cette extension revient à supposer, dans certains cas, un nombre négatif de boules. Cela revient encore à supposer le solitaire placé sur une pile de solitaires indéfinis et entièrement garnis.

Nous désignerons cette règle du jeu, que nous avons à considérer pour les besoins de la théorie, sous le nom de *règle complète*, et la règle ordinaire sous le nom de *règle restreinte*. Toute solution déduite de la règle complète sera dite *solution théorique*, et toute solution déduite de la règle restreinte sera dite *solution pratique*.

DES POSITIONS ET DES CASES CONGRUENTES.

Nous dirons que deux positions de boules sur le solitaire indéfini sont *congruentes* lorsque l'on peut passer de l'une à l'autre par les divers systèmes de coups qui résultent de l'emploi de la règle complète. Nous allons d'abord montrer l'effet de la règle complète sur un certain nombre de positions, par une marche accélérée, analogue à celle des coups triples.

THÉORÈME I. — *On peut toujours enlever trois boules situées sur trois cases consécutives.*

En effet, il suffit de se reporter à la marche du coup triple ordinaire. La règle ordinaire suppose vide l'une des cases A et A′, et l'autre pleine; mais par les extensions III et IV, les deux conditions précédentes ne sont plus nécessaires; ces deux cases peuvent être, en même temps, vides ou remplies; nous avons alors le *coup triple théorique*.

THÉORÈME II. — *On peut toujours enlever ou ajouter deux boules, ou un nombre pair de boules sur une case quelconque* C.

En effet, considérons trois cases consécutives B, C, D; nous pouvons jouer, même lorsque les cases B et D sont vides, par

l'extension IV, les deux coups soustractifs $\frac{B}{D}$, $\frac{D}{B}$; l'état des cases B et D n'a pas changé, mais la case C possède deux boules de moins. Par deux coups additifs, on peut ajouter deux boules sur la case C.

THÉORÈME III. — *On peut toujours faire franchir à une boule quelconque deux cases consécutives dans un sens quelconque, soit sur une ligne ou sur une colonne.*

En effet, considérons quatre cases consécutives A, B, C, D, situées sur la même ligne, ou sur la même colonne, et une boule en A. Par un coup additif de A en C, et par un coup soustractif de B en D, on amène une boule de A en D, sans modifier l'état des cases B et C.

En répétant plusieurs fois la même opération, on peut déplacer une boule sur des cases A, D, ..., en franchissant chaque fois deux cases consécutives. Toutes les cases séparées par deux cases consécutives seront dites *congruentes*, et l'on peut porter les boules d'une case dans l'une de ses congruentes [1].

EFFETS SUCCESSIFS DE LA RÈGLE COMPLÈTE.

Si l'on se reporte aux généralisations indiquées dans les extensions III et IV, on observera facilement qu'un coup quelconque

[1] Si (x, y) et (x', y') désignent les coordonnées de deux cases congruentes, les différences $x - x'$ et $y - y'$ sont simultanément des multiples de trois. En arithmétique, cette relation s'écrit ainsi :

$$x \equiv x', \quad (\text{Mod. } 3).$$
$$y \equiv y', \quad (\text{Mod. } 3)$$

additif ou soustractif de la règle complète a pour effet de changer la parité du nombre de boules situées sur trois cases consécutives. En d'autres termes, les nombres de boules situées sur les trois cases varient d'une unité dans un sens ou dans l'autre [1].

RÉSIDU CONGRUENT SUR UN CARRÉ DE NEUF CASES.

Par l'application de la règle complète, on peut démontrer le théorème suivant, qui est le fondement de la théorie du docteur Reiss.

THÉORÈME IV. — *Quelle que soit la position des boules du solitaire indéfini, on peut toujours réunir toutes ces boules dans un carré formé par neuf cases contiguës et choisi arbitrairement.*

En effet, sur l'étendue du solitaire indéfini, prenons arbitrairement un carré de neuf cases contiguës; on peut déplacer une boule quelconque du solitaire (THÉORÈME III), de trois en trois rangs, dans le sens horizontal, jusqu'à ce qu'elle se trouve sur une colonne ou sur le prolongement d'une colonne du carré choisi; cela fait, on peut ensuite déplacer cette boule de trois en trois rangs, dans le sens vertical, jusqu'à ce qu'on l'amène sur une des

[1] Si (a, b, c) et (a', b', c') désignent les nombres de boules situées sur trois cases consécutives A, B, C, avant ou après un coup additif ou soustractif portant sur ces trois boules, on a

$$a \equiv a' + 1, \quad (\text{Mod. } 2),$$
$$b \equiv b' + 1, \quad (\text{Mod. } 2),$$
$$c \equiv c' + 1, \quad (\text{Mod. } 2).$$

cases du carré. Il est facile de voir qu'une case quelconque possède toujours une case congruente, et une seule, sur un carré de neuf cases arbitrairement choisi.

En opérant successivement pour toutes les boules du solitaire, on les placera sur le carré de neuf cases; cette nouvelle position est ce que nous appellerons un *résidu congruent* sur un carré de neuf cases, choisi arbitrairement.

On peut déduire de ce théorème la théorie des impossibilités par l'emploi de la règle complète, ainsi que l'a fait le docteur Reiss; mais il est préférable de se servir des théorèmes suivants, imaginés par M. Hermary, qui d'ailleurs les avait obtenus directement sans connaître les travaux de ses prédécesseurs.

POSITION RÉDUITE.

THÉORÈME V. — *Quelle que soit la position des boules du solitaire indéfini, on peut toujours les remplacer, par l'emploi de la règle complète, par une position congruente renfermée dans un carré formé de quatre cases et choisi arbitrairement.*

En effet, choisissons d'abord un carré de quatre cases, indiqué par les cases couvertes de la *fig.* 32, sans nous occuper, pour l'instant, des lettres qui la recouvrent, et bordons ce carré de cinq cases vides; nous formons ainsi un carré de neuf cases sur lesquelles nous pouvons établir le résidu congruent, par l'application du théorème précédent.

Désignons par a_0, b_0, c_0 ; a_1, b_1, c_1 ; a_2, b_2, c_2, les nombres de

boules qui se trouvent placées sur chacune des neuf cases; nous formons ainsi la *fig.* 32 :

Fig. 32.

a_2	b_2	c_2
a_1	b_1	c_1
a_0	b_0	c_0

Par trois coups additifs, de haut en bas, on obtient (*fig.* 33) :

Fig. 33.

$a_1 + a_2$	$b_1 + b_2$	$c_1 + c_2$
$a_0 + a_2$	$b_0 + b_2$	$c_0 + c_2$

Par deux coups additifs, de droite à gauche, on obtient (*fig.* 34) :

Fig. 34.

$+a_1+a_2$ $+c_1+c_2$	$+b_1+b_2$ $+c_1+c_2$	
$+a_0+a_2$ $+c_0+c_2$	$+b_0+b_2$ $+c_0+c_2$	

Par conséquent, nous avons remplacé la position quelconque du solitaire indéfini par une position congruente sur un carré formé de quatre cases et choisi arbitrairement.

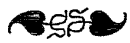
Mais, par l'application de la règle complète (Théorème II), on peut supprimer ou ajouter un nombre pair de boules sur une case quelconque. Par conséquent, sur ce carré de quatre cases, on pourra continuer l'opération jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une seule boule sur chaque case, ou qu'il n'en reste plus. On obtient alors ce que l'on appelle le *résidu* ou la *position réduite* de la position considérée sur le solitaire par rapport au carré donné. Cela posé, on a encore la proposition suivante :

Théorème VI. — *Toutes les positions congruentes du solitaire indéfini ont la même position réduite par rapport à un même carré de quatre cases.*

En effet, supposons qu'avant d'avoir effectué la position con-

gruente sur le carré de neuf cases, on ait joué un coup, par l'application de la règle complète; ce coup aurait modifié d'une unité, en plus ou en moins, trois nombres, tels que a_1, a_2, a_3 de même lettre, ou les trois nombres a_1, b_1, c_1, de même indice; les nombres du carré de quatre cases (*fig.* 34) auraient été modifiés de 0 ou de 2 unités, et leur parité n'aurait pas changé.

Un nombre quelconque de coups n'altère donc pas la parité du nombre des boules du carré de quatre cases, et, par suite, n'altère pas la position réduite. C. Q. F. D.



LES SEIZE FORMES DE POSITIONS RÉDUITES.

En général, on appelle *arrangements complets* de p objets pris q à q, les différentes dispositions rectilignes contenant q objets pris une ou plusieurs fois parmi les p objets donnés. Ainsi les arrangements complets des deux chiffres 0 et 1 pris quatre par quatre sont les seize dispositions suivantes :

0000	0100	1000	1100
0001	0101	1001	1101
0010	0110	1010	1110
0011	0111	1011	1111

De même, les arrangements complets des dix chiffres décimaux pris 6 à 6 est l'ensemble de tous les nombres qui n'ont pas plus de six chiffres; leur nombre est 1 000 000 ou 10^6. Dans le cas général, le nombre des arrangements complets de p objets pris q à q est p^q.

Cela posé, sur un carré formé de quatre cases et choisi arbitrairement, la position réduite peut affecter *seize formes* différentes qui sont les arrangements complets de 0 et de 1 sur les

quatre cases du carré. Nous les rangerons d'après le tableau suivant :

Tableau des seize formes de positions réduites.

Ire CLASSE :	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$.
IIe CLASSE :	$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$.
IIIe CLASSE :	$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$.

La *première classe* ne contient qu'une forme, qui est congruente à deux boules dans une même case, ou à trois boules dans trois cases consécutives, ou encore à deux boules séparées par deux cases consécutives.

La *deuxième classe* comprend neuf formes réductibles à une seule boule dans le carré de neuf cases.

La *troisième classe* comprend les six autres formes, qui ne sont jamais réductibles à moins de deux boules, quelles que soient les transformations qu'on leur fasse subir sur le carré de neuf cases. Ces formes comprennent toujours deux boules, au moins, qui ne sont jamais situées ni dans la même ligne, ni dans la même colonne.

On voit ainsi que, pour déterminer la *classe* (0, 1 ou 2 boules dans le résidu), il n'est pas nécessaire de réduire sur le carré de quatre cases; mais on peut opérer sur celui de neuf. La position réduite sur quatre cases est, comme nous l'avons dit, fort utile pour la théorie et très ingénieuse; c'est précisément en cela que consiste, pour la plus grande part, l'avantage de la méthode de M. Hermary sur celle du docteur Reiss.

APPLICATIONS DE LA THÉORIE.

Il est évident que l'on peut concevoir des solitaires limités dont la forme est quelconque, ainsi que le nombre des cases; on peut même supposer des solitaires irréguliers, que l'on peut déduire des solitaires de forme régulière en supprimant des cases dans l'intérieur ou sur les bords. Mais, quelle que soit la forme du solitaire, il est évident que tout problème impossible sur le solitaire indéfini l'est, *à fortiori*, sur le solitaire limité.

On a le théorème suivant, inverse du précédent :

THÉORÈME VII. — *Pour pouvoir passer, par la règle complète, d'une position donnée du solitaire indéfini à une autre aussi donnée, il faut et il suffit que les deux positions aient la même position réduite sur le même carré de quatre cases.*

En effet, on peut passer de la première position à la position réduite; puis, on peut passer de celle-ci à la seconde position en renversant le *sens* des coups qui permettent de passer de la seconde position à la même position réduite, et en renversant encore l'ordre des coups. Renverser le sens d'un coup, c'est remplacer le coup additif par le coup soustractif; par conséquent, le

coup soustractif ou additif $\frac{A}{C}$ doit être remplacé par le coup additif ou soustractif $\frac{C}{A}$.

Par conséquent, dans le cas du solitaire restreint, si l'on se propose de passer d'une position à une autre, il faut d'abord que ces deux positions aient la même position réduite sur le carré de quatre cases; mais on doit observer que cette condition n'est pas suffisante. En supposant cette condition admise, le problème pourrait encore être impossible; cette théorie laisse donc une grande part à la sagacité du joueur; mais elle lui épargne cependant des recherches nécessairement infructueuses, en lui permettant de reconnaître les problèmes qui ne comportent pas de solution théorique.

Dans le théorème précédent, nous avons considéré le problème général du solitaire, qui consiste à passer d'une position donnée à une autre également donnée; dans les théorèmes suivants, nous ne considérons que le cas de la *réussite*, qui consiste, comme nous l'avons dit, à réduire une position donnée à une seule boule. En se reportant à une position congruente sur un carré de neuf cases déduite de l'une des seize classes de positions réduites, on obtient les trois théorèmes suivants :

THÉORÈME VIII. — *Lorsqu'une position initiale donnée permet d'obtenir une réussite de plusieurs manières différentes, les cases terminales sont nécessairement congruentes.*

THÉORÈME IX. — *Lorsqu'une position initiale donnée ne peut être réduite à une seule boule sur une case terminale, elle ne peut être réduite à une seule boule sur une case terminale congruente.*

THÉORÈME X. — *Si l'on ne peut obtenir une réussite en partant d'une certaine case initiale, on ne pourra obtenir de réussite en partant d'une case initiale congruente.*

Ces trois théorèmes ne sont que des cas particuliers du théorème VII.

IMPOSSIBILITÉS DU SOLITAIRE DE 37 CASES.

Examinons d'abord la position réduite du solitaire complet. On fait les quatre coups triples théoriques :

$$\frac{13}{15},\ \frac{31}{51},\ \frac{37}{57},\ \frac{73}{75}.$$

On ramène ainsi à la position congruente formée par un carré de vingt-cinq boules (Ex. III, page 116); par le procédé indiqué en cet endroit, on ramène à une boule unique en 44. Ainsi, le *solitaire complet de 37 cases donne une position réduite de deuxième classe.*

Le cas considéré est purement théorique, puisque l'on ne pourrait pas jouer le premier coup avec la règle restreinte; mais le résultat que nous venons d'obtenir va nous permettre de déterminer la position réduite lorsqu'on aura choisi une case initiale quelconque. En effet, on observera qu'au point de vue théorique, il est indifférent de retrancher ou d'ajouter une boule sur une case, puisque la règle complète permet d'en ajouter deux sur une même case (THÉORÈME II); donc la position réduite du solitaire complet, moins une case, revient à une boule sur la case centrale, et à une autre sur la case congruente de la case initiale, la

plus voisine de la case centrale. Si la case congruente de la case initiale, la plus voisine de la case centrale, est l'une des cases **44**, **33**, **35**, **53**, **55**, la réussite est donc impossible. Nous avons démontré qu'elle était possible dans les autres cas, par l'emploi de la règle restreinte.

En résumé, sur le solitaire de 37 cases, la réussite est possible lorsque l'on prend pour case initiale l'une des seize cases dont l'ensemble forme la *finale du Tricolet* (Ex. IV, page 116) :

13, **15**, **24**, **31**, **34**, **37**, **42**, **43**,
45, **46**, **51**, **54**, **57**, **64**, **73**, **75**;

elle est impossible dans tous les autres cas.

ÉTUDE DU SOLITAIRE DE 41 CASES.

Le solitaire complet de 41 cases diffère du précédent par l'addition des cases **04**, **40**, **48**, **84**. Transportons ces boules sur les cases congruentes **34**, **43**, **45**, **54** ; enlevons, par un coup triple, les boules **34**, **44**, **54** ; ajoutons deux boules en **44** (Théorème II), et enlevons, par un coup triple, les boules **43**, **44**, **45** ; il reste une boule en **44** ; donc le *solitaire complet de 41 cases donne une position réduite de deuxième classe*, comme le solitaire de 37 cases. Il comporte donc les mêmes solutions théoriques que ce dernier, et, en outre, celles qui correspondent aux cas où l'on prend pour initiales les *cases additionnelles* formant les sommets du carré.

Quant aux solutions pratiques, on ne connaît actuellement que celle que nous avons indiquée (page 117). Cette réussite a pour

case initiale 46 et pour case finale 42; par le procédé de réciprocité, tout aussi bien que par symétrie horizontale, on en déduit la réussite de case initiale 42 et de case finale 46. Pour les autres cas théoriquement possibles, M. Hermary pense que la solution pratique n'existe pas, mais il n'est pas parvenu à le démontrer. Nous engageons le lecteur à étudier cette question, dont la solution donnerait peut-être l'indication de nouveaux criteriums d'impossibilité (*Voir* la note V, à la fin du volume.)

ÉTUDE DU SOLITAIRE DE 33 CASES.

Le solitaire de 33 cases est le plus habituellement usité en Allemagne; il ne diffère du solitaire de 37 cases que par la suppression des quatre cases 22, 26, 62, 66 (*fig.* 35). Si l'on effectue les coups triples théoriques

$$\frac{13}{15}, \frac{23}{25}, \frac{63}{65}, \frac{73}{75}, \frac{31}{51}, \frac{32}{52}, \frac{33}{53}, \frac{34}{54}, \frac{35}{55}, \frac{36}{56}, \frac{37}{57},$$

il ne reste aucune boule; donc *le solitaire complet de 33 cases donne une position réduite de première classe.* Il en résulte que la solution théorique existe toujours. Nous allons montrer, d'après le docteur Reiss, que la solution pratique existe encore, même en posant cette condition de *prendre une case initiale quelconque, et, pour case finale, une case congruente quelconque de la case initiale.*

Nous devons d'abord prendre une case initiale quelconque; mais par suite des considérations de symétrie que nous avons exposées précédemment, nous devons nous reporter au tableau des

groupes de cases symétriques du solitaire de 37 cases, en supprimant le groupe III, dont les cases n'appartiennent pas au solitaire que nous considérons actuellement. Il nous suffit donc de prendre pour case initiale l'une des cases de chacun des sept autres groupes; nous prendrons les cases initiales

44, 74, 54, 57, 24, 55, 52.

Les deux premières sont congruentes; les trois suivantes le sont aussi; il en est de même des deux dernières.

Fig. 35.

		37	47	57		
		36	46	56		
15	25	35	45	55	65	75
14	24	34	44	54	64	74
13	23	33	43	53	63	73
		32	42	52		
		31	41	51		

Combinons maintenant chacune des cases initiales que nous venons de choisir, avec l'une quelconque des cases congruentes, prise pour case finale; nous formerons le tableau suivant, dans lequel la première colonne indique l'ordre des parties distinctes; la deuxième colonne CI représente la case initiale, et la troisième colonne CF indique la case finale de la réussite. Ce tableau con-

tient vingt-huit réussites; mais, en tenant compte des observations contenues dans la quatrième colonne, il ne faudra plus conserver que les réussites pour lesquelles la quatrième colonne ne renferme aucune observation.

Tableau des vingt-huit réussites du solitaire de 33 cases.

Nos.	CI.	CF.	OBSERVATIONS.
1	44	44	. . . . ——— . . . .
2	»	74	. . . . ——— . . . .
3	»	47	Symétrique inclinée du n° 2. . . . .
4	»	14	Symétrique verticale du n° 2. . . . .
5	»	41	Symétrique horizontale du n° 3 . . . .
6	74	44	Réciproque du n° 2 . . . . .
7	»	74	. . . . ——— . . . .
8	»	47	. . . . ——— . . . .
9	»	14	. . . . ——— . . . .
10	»	41	Symétrique horizontale du n° 8. . . .
11	54	54	. . . . ——— . . . .
12	»	57	. . . . ——— . . . .
13	»	24	. . . . ——— . . . .
14	»	51	Symétrique horizontale du n° 12 . . . .
15	57	54	Réciproque du n° 12. . . . .
16	»	57	. . . . ——— . . . .
17	»	24	. . . . ——— . . . .
18	»	51	. . . . ——— . . . .
19	24	54	Réciproque du n° 13. . . . .
20	»	57	Réciproque du n° 17. . . . .
21	»	24	. . . . ——— . . . .
22	»	51	Symétrique horizontale du n° 20 . . . .
23	55	55	. . . . ——— . . . .
24	»	52	. . . . ——— . . . .
25	»	25	Symétrique inclinée du n° 24. . . . .
26	52	55	Réciproque du n° 24. . . . .
27	»	52	. . . . ——— . . . .
28	»	25	. . . . ——— . . . .

Il ne nous reste plus à considérer que *seize réussites principales* que nous désignerons par les chiffres romains.

Tableau des seize réussites principales du solitaire de 33 cases.

I	De	44	à	44	IX	De	54	à	24
II	»	44	»	74	X	»	57	»	24
III	»	74	»	74	XI	»	57	»	51
IV	»	74	»	47	XII	»	24	»	24
V	»	74	»	14	XIII	»	55	»	55
VI	»	54	»	54	XIV	»	55	»	52
VII	»	54	»	57	XV	»	52	»	52
VIII	»	57	»	57	XVI	»	52	»	25

LES RÉUSSITES DU DOCTEUR REISS.

Ire RÉUSSITE. — De 44 à 44.

$\frac{64}{44}$, $\frac{56}{54}$, $\frac{44}{64}$, $\frac{52}{54}$, $\frac{73}{53}$, $\frac{75}{73}$, $\frac{43}{63}$, $\frac{73}{53}$, $\frac{54}{52}$, $\frac{35}{55}$, $\frac{65}{45}$, $\frac{15}{35}$, $\frac{45}{25}$, $\frac{37}{35}$, $\frac{57}{37}$, $\frac{34}{36}$, $\frac{37}{35}$, $\frac{25}{45}$, $\frac{46}{44}$, $\frac{23}{43}$, $\frac{31}{33}$, $\frac{43}{23}$, $\frac{51}{31}$, $\frac{52}{32}$, $\frac{31}{33}$, $\frac{14}{34}$, $\frac{34}{32}$, $\frac{13}{33}$, $\frac{32}{34}$, $\frac{34}{54}$, $\frac{64}{44}$.

Cela représente une autre solution de la *triple croix* (*Prob.* XII, page 98) sans empiéter sur le solitaire de 37 cases.

IIe RÉUSSITE. — De 44 à 74.

Remplacer le dernier coup de la réussite précédente par $\frac{51}{74}$, d'après le procédé général d'échange des cases finales.

IIIe RÉUSSITE. — De 74 à 74.

Remplacer le premier coup de la réussite précédente par $\frac{54}{74}$, conformément au procédé général d'échange des cases initiales.

IVe RÉUSSITE. — De 74 à 47.

$\frac{54}{74}$, $\frac{52}{54}$, $\frac{44}{64}$, $\frac{73}{55}$, $\frac{74}{54}$, $\frac{54}{52}$, $\frac{51}{53}$, $\frac{31}{51}$, $\frac{32}{52}$, $\frac{43}{63}$, $\frac{51}{53}$, $\frac{63}{43}$, $\frac{34}{32}$, $\frac{13}{33}$, $\frac{15}{13}$, $\frac{43}{23}$, $\frac{13}{33}$, $\frac{32}{34}$, $\frac{56}{54}$, $\frac{75}{55}$, $\frac{54}{56}$, $\frac{57}{55}$, $\frac{37}{57}$, $\frac{36}{56}$, $\frac{45}{65}$, $\frac{57}{55}$, $\frac{65}{45}$, $\frac{24}{44}$, $\frac{44}{46}$, $\frac{25}{45}$, $\frac{45}{47}$.

Cette réussite comporte trois coups triples, de part et d'autre des coups ayant les rangs 11, 20, 26.

Ve RÉUSSITE. — De 74 à 44.

On joue les vingt-quatre premiers coups de la réussite précédente; puis on fait :

$$\frac{34}{36}, \frac{55}{35}, \frac{57}{55}, \frac{25}{45}, \frac{55}{55}, \frac{36}{34}, \frac{34}{14}.$$

VIe RÉUSSITE. — De 54 à 54.

$\frac{56}{54}$, $\frac{75}{55}$, $\frac{54}{56}$, $\frac{74}{54}$, $\frac{53}{55}$, $\frac{73}{53}$, $\frac{43}{63}$, $\frac{51}{53}$, $\frac{63}{43}$, $\frac{33}{53}$, $\frac{41}{43}$, $\frac{53}{33}$, $\frac{23}{43}$, $\frac{31}{33}$, $\frac{43}{23}$, $\frac{13}{33}$, $\frac{15}{13}$, $\frac{25}{23}$, $\frac{34}{32}$, $\frac{13}{33}$, $\frac{32}{34}$, $\frac{45}{25}$, $\frac{37}{35}$, $\frac{57}{37}$, $\frac{34}{36}$, $\frac{37}{35}$, $\frac{25}{45}$, $\frac{56}{56}$, $\frac{44}{46}$, $\frac{36}{56}$, $\frac{56}{54}$.

Cette réussite comporte six coups triples, de part et d'autre des coups ayant les rangs 2, 8, 11, 14, 20, 29.

VIIe RÉUSSITE. — De 54 à 57.

Remplacer le dernier coup de la réussite précédente par $\frac{55}{57}$.

VIIIe RÉUSSITE. — De 57 à 57.

Remplacer le premier coup de la réussite précédente par $\frac{55}{57}$.

IXe RÉUSSITE. — De 54 à 24.

On joue les vingt-sept premiers coups de la VIIIe réussite, puis l'on fait

$$\frac{56}{54},\ \frac{54}{34},\ \frac{46}{44},\ \frac{44}{24}.$$

Xe RÉUSSITE. — De 57 à 24.

Remplacer le premier coup de la réussite précédente par $\frac{55}{57}$.

XIe RÉUSSITE. — De 57 à 51.

On joue d'abord les six premiers coups de la réussite précédente; les vingt-quatre coups qui suivent se déduisent, par symétrie horizontale, des coups correspondants de la VIe réussite; on termine par $\frac{53}{51}$.

XIIe RÉUSSITE. — De 24 à 24.

$$\frac{44}{24},\ \frac{36}{34},\ \frac{15}{35},\ \frac{34}{36},\ \frac{37}{35},\ \frac{57}{37},\ \frac{56}{36},\ \frac{45}{25},\ \frac{37}{35},\ \frac{25}{45},\ \frac{32}{34},\ \frac{13}{33},$$
$$\frac{34}{32},\ \frac{31}{33},\ \frac{51}{31},\ \frac{52}{32},\ \frac{43}{23},\ \frac{31}{33},\ \frac{23}{43},\ \frac{54}{56},\ \frac{75}{55},\ \frac{73}{75},\ \frac{45}{65},\ \frac{75}{55},$$
$$\frac{56}{54},\ \frac{64}{44},\ \frac{44}{42},\ \frac{63}{43},\ \frac{42}{44},\ \frac{14}{34},\ \frac{44}{24}.$$

Cette réussite comporte cinq coups triples, de part et d'autre des coups ayant pour rangs 3, 9, 12, 18, 28.

XIIIe RÉUSSITE. — De 55 à 55.

$\frac{53}{55}$, $\frac{73}{53}$, $\frac{75}{73}$, $\frac{65}{65}$, $\frac{52}{54}$, $\frac{73}{53}$, $\frac{54}{52}$, $\frac{51}{53}$, $\frac{31}{51}$, $\frac{32}{52}$, $\frac{43}{63}$, $\frac{51}{53}$,
$\frac{63}{43}$, $\frac{45}{65}$, $\frac{57}{55}$, $\frac{65}{45}$, $\frac{35}{55}$, $\frac{47}{45}$, $\frac{55}{35}$, $\frac{25}{45}$, $\frac{37}{35}$, $\frac{45}{25}$, $\frac{15}{35}$, $\frac{13}{15}$,
$\frac{23}{25}$, $\frac{34}{36}$, $\frac{15}{35}$, $\frac{36}{34}$, $\frac{33}{53}$, $\frac{34}{54}$, $\frac{53}{55}$.

Cette réussite comporte six coups triples, de part et d'autre des coups ayant pour rangs 6, 12, 15, 18, 21, 27.

XIVe RÉUSSITE. — De 55 à 52.

Remplacer le dernier coup de la réussite précédente par $\frac{54}{52}$.

XVe RÉUSSITE. — De 52 à 52.

Remplacer dans la réussite précédente le premier coup par $\frac{54}{52}$.

XVIe RÉUSSITE. — De 52 à 25.

On joue les vingt-huit premiers coups de la réussite précédente, puis on fait

$$\frac{43}{23}, \quad \frac{44}{24}, \quad \frac{23}{25}.$$

REMARQUE. — Il y aurait lieu de traiter, de la même manière, le problème du solitaire de quarante et une cases; mais la question parait beaucoup plus difficile. On pourrait encore considérer beaucoup d'autres solitaires. Avec M. Hermary, nous signalerons plus spécialement à l'attention de nos lecteurs, celui que l'on déduit du solitaire de quarante et une cases, en supprimant les

deux cases opposées 40 et 48. Sa position réduite est de première classe; il donne lieu à des solutions plus intéressantes que celles du solitaire de quarante et une cases; ces solutions existent pour plusieurs cas, et peut-être pour tous. C'est une question à élucider.

DES SOLITAIRES DES DIVERS ORDRES.

La question des solitaires des divers ordres repose sur la règle suivante : Faire franchir à une boule n cases consécutives, et enlever une boule dans chacune des cases franchies. Telle sera la règle du coup dans le jeu du *solitaire du* $n^{\text{ième}}$ *ordre*.

On peut établir la théorie de ce jeu comme celle du solitaire ordinaire ou de premier ordre. En admettant les quatre extensions de la règle restreinte, on obtient comme conséquences les théorèmes suivants :

THÉORÈME XI. — *On peut toujours faire franchir à une boule quelconque* $n + 1$ *cases consécutives, dans un sens quelconque, soit sur une ligne, soit sur une colonne.*

La démonstration est semblable à celle du théorème III.

THÉORÈME XII. — *On peut toujours faire franchir à deux boules d'une même case* n *cases consécutives.*

En effet, soient A et B, deux cases séparées par n cases consécutives $a_1, a_2, \ldots, a_n$; on jouera un coup additif de A en B; puis un coup soustractif de A en B.

THÉORÈME XIII. — *On peut transporter deux boules d'une case quelconque à une autre quelconque.*

En effet, il suffit de démontrer que l'on peut transporter deux boules d'une case A sur la case contiguë B; mais, par le théorème XI, on peut faire franchir $n + 1$ cases consécutives à deux boules de la case A dans le sens AB; par le théorème XII, en opérant en sens inverse, on ramène les deux boules sur la case B.

THÉORÈME XIV. — *On peut ajouter ou enlever deux boules en même temps sur n cases quelconques.*

En effet, d'après le théorème précédent, on peut supposer que les n cases sont consécutives; on fera alors deux coups soustractifs sur les n cases, par aller et retour.

En appliquant ces divers théorèmes, on peut énoncer ainsi qu'il suit les théorèmes concernant la position réduite :

Étant donné un carré quelconque de $(n+1)^2$ *cases, on peut y former la position réduite d'une position quelconque du solitaire de l'ordre n. Cette réduite comprendra* 0 *ou* 1 *boule dans chaque case du carré, et en outre un certain nombre de boules qui peuvent être placées n'importe où, à la condition qu'elles marcheront toujours par groupes de deux; le nombre de ces groupes pourra être l'un des nombres* $0, 1, 2, \ldots, (n-1)$. *La réduite peut donc affecter* $n(n+1)^4$ *formes distinctes qui caractérisent autant de systèmes de positions congruentes, tels qu'on ne peut passer de l'un à l'autre, quel que soit le nombre de coups que l'on joue.*

On peut encore ajouter une nouvelle extension de la règle, qui consisterait à modifier simultanément d'une unité $n+2$ cases consécutives, la modification pouvant être positive ou négative, individuellement pour chaque case. Dans ce cas, les boules qui

marchent par groupes de deux peuvent être supprimées, et le nombre des systèmes distincts se réduit à $(n+1)^4$.

Quant au nombre des systèmes réductibles à une seule boule, il est toujours égal à $(n+2)^2$.

Ces théorèmes ont été donnés par M. Hermary, à propos des questions que je lui avais indiquées sur les solitaires des divers ordres.

SIXIÈME RÉCRÉATION.

LA NUMÉRATION BINAIRE.

A Monsieur J.-J. Sylvester, correspondant de l'Institut, professeur de l'Université J. Hopkins, à Baltimore.

« La réflexion jointe à l'usage donne des idées nettes; et alors on trouve des méthodes abrégées dont l'invention flatte l'amour-propre, dont la justesse satisfait l'esprit, et qui font faire avec plaisir un travail ingrat par lui-même. »

(J.-J. Rousseau. — *Les Confessions.*)

« La vérité semble quelquefois courir au-devant de celui qui la cherche; souvent il n'y a point d'intervalle entre le désir, l'espoir et la jouissance. »

(Montesquieu. — *Rapport sur l'usage des Glandes Rénales.*)

SIXIÈME RÉCRÉATION.

LA NUMÉRATION BINAIRE.

DE LA NUMÉRATION.

On regarde habituellement la numération comme l'opération fondamentale de l'arithmétique, comme le principe de toutes les opérations que l'on peut effectuer sur les nombres. C'est là une faute grave de logique, puisque les propriétés des nombres existent indépendamment de tout système de numération.

La numération est une langue de pure convention, qui permet de parler et d'écrire les nombres au moyen de plusieurs autres représentés par des mots pour le langage, et par des chiffres pour l'écriture. L'opération fondamentale de l'arithmétique est la loi de formation des nombres, c'est-à-dire l'addition. La numération décimale est une opération plus complexe, contenant à la fois l'addition et la multiplication; ainsi, par exemple, le nombre 45 représente dans le système décimal le résultat de la multiplication de quatre par dix, et l'addition postérieure de cinq unités. On sait

d'ailleurs que cette numération décimale est une création relativement tardive de l'arithmétique.

On conçoit bien qu'au lieu de compter les nombres par dizaines, par centaines ou groupes de dix dizaines, par mille ou groupes de dix centaines, on aurait pu remplacer le nombre *dix* par tout autre, et ainsi par *douze*. Déjà Aristote avait observé que le nombre *quatre* pourrait très bien remplacer le nombre dix; Weigel publia, à ce sujet, en 1687, le plan d'une *Arithmétique tétractique*.

Le choix presque unanime du nombre dix, comme base de la numération, provient probablement de la conformation de la main. De même, la plupart des unités, chez les anciens peuples, dérivent ordinairement des dimensions du corps humain : ainsi, par exemple, le pied, la coudée, etc. Au XVIIe siècle, Melchisédec Thévenot cherchait une mesure universelle, dans la régularité et l'égalité de la cire des ruchers (¹). Les nouvelles mesures sont établies sur des bases plus stables, et proviennent de rapports géodésiques, physiques, etc., comme le *mètre*, le pendule.

SYSTÈME BINAIRE.

Tout système de numération est donc fondé sur l'emploi d'unités de divers ordres, dont chacune contient la précédente un même nombre de fois. Ce nombre d'unités de chaque ordre, qui est nécessaire pour former une unité de l'ordre suivant est appelé

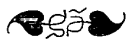
(¹) *Voir* la note complémentaire VI à la fin du volume.

la *base* du système de numération. Cette base doit être au moins égale à *deux;* en effet, si l'on prenait *un* pour base, les unités des divers ordres seraient égales entre elles, et il n'y aurait plus, à proprement parler, de système de numération. On doit à Leibniz la connaissance de l'*arithmétique binaire*. Dans ce système, la base est le nombre *deux*, et l'on peut écrire tous les nombres avec les chiffres 0 et 1, en adoptant cette seule convention, analogue à la convention de la numération écrite du système décimal, que tout chiffre placé immédiatement à la gauche représente des unités deux fois plus fortes. Ainsi, dans ce système, les nombres deux, quatre, huit, seize,..., s'écrivent

10, 100, 1000, 10000, ...,

et les nombres trois, cinq, onze, vingt-neuf s'écrivent

11, 101, 1011, 11101.



SYSTÈME DUODÉCIMAL.

Simon Stevin, de Bruges (mort en 1633), avait autrefois proposé le système de *numération duodécimale,* se rapprochant beaucoup plus de notre manière de compter les mois de l'année, les heures du jour, et les degrés de la circonférence; mais le changement du système actuel produirait trop d'inconvénients relativement aux petits avantages qui résulteraient du choix de la base *douze*. Plus tard, Auguste Comte avait observé que la structure de la main, composée de quatre doigts à trois phalanges, ou de douze phalanges opposées au pouce, permettait de représenter,

avec les deux pouces posés sur deux phalanges, tous les nombres jusqu'à treize fois douze; par suite, on pourrait ainsi compter sur ses phalanges, dans le système duodécimal, plus facilement et plus loin que sur ses doigts, dans le système décimal. Mais de cet ingénieux système on ne connaît plus guère aujourd'hui que la comparaison faite par Auguste Comte, des quatre doigts et du pouce au peloton des quatre hommes et du caporal.

AVANTAGES DU SYSTÈME BINAIRE.

Dans ce système, les opérations ordinaires de l'arithmétique sont réduites à leur expression la plus simple ; les résultats de l'addition sont réduits à ceci : 1 et 1 font *deux*, je pose 0 et je retiens 1. Quant à la table de Pythagore, elle n'existe pas ici, on a seulement ceci : 1 multiplié par 1 donne 1; en sorte que la multiplication se fait par le déplacement transversal du multiplicande. Pour la division, il n'y a aucun tâtonnement. De plus, ce système se prêterait plus naturellement que tout autre à la confection des machines arithmétiques, si l'on ne possédait pas aujourd'hui l'admirable *Arithmomètre* de Thomas (de Colmar). Cependant je dois ajouter que la numération binaire m'a permis de trouver des nombres premiers beaucoup plus grands que ceux que l'on connaissait jusqu'à présent, et que j'en ai déduit le plan d'une machine qui donnerait de très grands nombres premiers ([1]). Mais ce système est incommode à cause de la grande quantité de caractères

([1]) *Voir* mon Mémoire intitulé : *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise, et sur diverses questions d'arithmétique supérieure.* — Rome, 1877.

qui sont nécessaires pour figurer un nombre un peu considérable.

Voici un moyen très rapide indiqué par Legendre, dans la *Théorie des Nombres*, pour exprimer un grand nombre en caractères binaires. Soit, par exemple, le nombre 11 183 445 ; je le divise par 64, j'ai le reste 21 et le quotient 174 741 ; celui-ci divisé par 64 donne le reste 21 et le quotient 2730; enfin 2730 divisé par 64 donne le reste 42 et le quotient 42 ; mais 21 s'exprime dans le système binaire par **10101**, et 42 par **101010**. Donc le nombre proposé s'exprimera par

101010 101010 010101 010101.

LE JEKIM.

Le système de la numération binaire donne l'explication d'un symbole chinois portant le nom de *Je-Kim* ou *Jeking* (livre des mutations), attribué à Fohi, le plus ancien législateur de la Chine. Ce symbole est composé de 64 petites figures formées chacune de six lignes horizontales superposées, les unes entières, les autres brisées par le milieu. Il avait fait le désespoir des lettrés chinois et des savants européens, qui n'avaient pu parvenir à l'expliquer d'une manière satisfaisante, lorsque l'illustre Leibniz, comparant les différents caractères du Je-Kim à la suite des nombres écrits dans le système binaire, reconnut que cette arithmétique pouvait servir à interpréter l'énigme, et que le Je-Kim n'était autre chose que la suite des 64 premiers nombres écrits dans le système de numération qui a pour base 2, mais intervertis de leur ordre naturel. En effet, si l'on représente l'unité par un trait horizontal simple ———, et le zéro par un trait brisé —— ——; si,

de plus, on convient d'écrire les unités des divers ordres non plus de droite à gauche, mais bien de bas en haut; comme d'ailleurs les zéros placés à gauche d'un nombre n'en changent pas la valeur, on trouvera que les caractères chinois, composés de six lignes horizontales et représentés ci-dessous, peuvent être interprétés de la manière suivante:

CARACTÈRES CHINOIS du Jekim.	TRADUCTION dans le système binaire.	VALEUR sous forme ordinaire.
	000000	0
	000001	1
	000010	2
	000011	3
	000100	4
	000101	5

Leibniz voyait encore dans cette énigme qu'il avait si heureusement déchiffrée, une image de la création tirée du néant par la volonté de Dieu, de même que, disait-il, tous les nombres sont engendrés, dans le système binaire, par le zéro et l'unité. Cette idée lui plut tellement, qu'il engagea le P. Bouvet, missionnaire en Chine, à la développer devant l'empereur régnant, pour le con-

vertir au christianisme. Nous ne prétendons aucunement justifier cette application douteuse de la science aux mystères théologiques. Nous la citons comme un document curieux de l'histoire de l'arithmétique binaire, et nous ajouterons, avec un savant illustre, que l'idée de Leibniz était une idée pythagoricienne échappée à l'imagination active de ce grand génie, et sur laquelle il n'eût sans doute pas insisté plus qu'elle ne le méritait.

LES BOÎTES DE POIDS.

Nous donnerons d'abord le tableau des trente-deux premiers nombres écrits dans le système binaire :

1	1	9	1001	17	10001	25	11001
2	10	10	1010	18	10010	26	11010
3	11	11	1011	19	10011	27	11011
4	100	12	1100	20	10100	28	11100
5	101	13	1101	21	10101	29	11101
6	110	14	1110	22	10110	30	11110
7	111	15	1111	23	10111	31	11111
8	1000	16	10000	24	11000	32	100000

Il est facile de continuer ce tableau aussi loin que l'on veut ; on voit immédiatement qu'un nombre quelconque peut être formé par l'addition des nombres suivants :

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \ldots,$$

qui représentent, avec l'unité, toutes les puissances de deux.

Mais dans cette addition, chaque nombre ne doit être pris qu'une seule fois. En d'autres termes, un nombre entier quelconque est une somme de puissances de deux, toutes différentes, en admettant l'unité comme puissance *d'exposant zéro*. Cette propriété pourrait être utilisée dans le commerce; ainsi, pour peser un nombre entier de grammes, on peut employer une boîte contenant chacun des poids suivants :

$$1^{gr},\ 2^{gr},\ 4^{gr},\ 8^{gr},\ 16^{gr},\ 32^{gr},\ \ldots.$$

Avec six poids, on pourrait ainsi peser jusqu'à 63^{gr}; avec n poids, on pourrait peser jusqu'à un nombre de grammes représenté par la formule

$$2^n - 1.$$

Mais les boîtes sont composées d'une manière bien différente, car elles contiennent les poids :

$$1^{gr},\ 2^{gr},\ 2^{gr},\ 5^{gr};$$
$$1^{dg},\ 2^{dg},\ 2^{dg},\ 5^{dg};$$
$$1^{hg},\ 2^{hg},\ 2^{hg},\ 5^{hg};$$
$$1^{kg},\ 2^{kg},\ 2^{kg},\ 5^{kg};$$

et ainsi de suite. On voit, en effet, qu'avec les nombres 1, 2, 2, 5, on peut former, par addition, tous les nombres de 1 à 10. Ces boîtes présentent l'avantage d'être plus en rapport avec le système ordinaire de la numération décimale, et, par conséquent, l'opération de la pesée n'exige aucun effort d'esprit; mais, jusqu'à une limite quelconque, il faut moins de poids dans le système binaire que dans le système décimal.

Les nombres de la progression triple

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ \ldots,$$

ont une propriété analogue, qui consiste en ce qu'en les ajoutant ou en les retranchant d'une certaine manière, on forme tous les nombres entiers possibles. Cette propriété remarquable se démontre très simplement au moyen du système de la numération ternaire ou de base 3, modifié par l'introduction de caractères négatifs. Ainsi, en convenant qu'un petit trait placé au-dessus d'un chiffre $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, ..., exprime que le nombre indiqué par ce chiffre avec sa valeur de position doit être retranché, on peut écrire tous les nombres du système décimal avec les cinq premiers chiffres significatifs 1, 2, 3, 4, 5, et le caractère 0. Par exemple, 6 serait exprimé par $1\bar{4}$; 7 par $1\bar{3}$, et ainsi de suite. Si l'on applique cette considération au système ternaire, on arrive à écrire tous les nombres avec les caractères 1, $\bar{1}$ et 0. Ainsi, les nombres

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\quad 6,\quad 7,\quad 8,\quad 9,$$

peuvent être représentés par les symboles

$$1,\ 1\bar{1},\ 10,\ 11,\ 1\bar{1}\bar{1},\ 1\bar{1}0,\ 1\bar{1}1,\ 10\bar{1},\ 100.$$

On pourrait encore utiliser cette propriété pour la pesée, en répartissant convenablement les poids de 1^{gr}, 3^{gr}, 9^{gr}, 27^{gr}, ..., entre les deux plateaux d'une balance, pour évaluer, avec le moindre nombre possible de poids différents, les masses qui peuvent être exprimées en nombres entiers.

Ainsi, avec quatre poids de 1^{gr}, 3^{gr}, 9^{gr}, 27^{gr}, on pourra peser jusqu'à 40^{gr}; avec les cinq poids de 1^{gr}, 3^{gr}, 9^{gr}, 27^{gr}, 81^{gr}, on pourra peser jusqu'à 121^{gr}. En général, avec n poids

$$1,\ 3,\ 3^2,\ 3^3,\ \ldots,\ 3^{n-1},$$

on pourra peser jusqu'à un nombre de grammes représenté par

l'expression $\frac{1}{2}(3^n - 1)$. La progression géométrique de raison 3 résout le problème énoncé par M. Labosne sous la forme suivante : *Trouver une série de poids avec lesquels on puisse faire toutes les pesées en nombres entiers, depuis 1 jusqu'à la somme des poids employés, cette somme étant la plus grande possible relativement au nombre de poids* (¹).

L'ÉVENTAIL MYSTÉRIEUX.

Reprenons le tableau que nous avons construit (page 151), et écrivons les uns au-dessous des autres, dans une première colonne à droite, tous les nombres tels que leur dernier chiffre dans le système binaire soit l'unité; écrivons dans une seconde colonne tous les nombres tels que leur deuxième chiffre, à partir de la droite, dans le système binaire, soit l'unité; dans une troisième colonne, tous les nombres tels que leur troisième chiffre, à partir de la droite, soit l'unité, et ainsi de suite. On peut s'arrêter à une colonne quelconque, à la cinquième, par exemple, les nombres écrits étant limités à 31, et, en général, pour la $n^{\text{ième}}$ colonne à $2^n - 1$. Cela fait, on présente le tableau ainsi formé à une personne quelconque; on lui dit de penser un nombre jusqu'à 31, et d'indiquer ensuite dans quelles colonnes ce nombre se trouve écrit. On devine facilement le nombre pensé en écrivant à la suite

(¹) *Voir* à ce sujet la 4ᵉ édition de Bachet, publiée par M. Labosne, p. 154-156.

et de droite à gauche, **1** pour toute colonne dans laquelle le nombre pensé se trouve écrit, et **0** pour toute colonne dans laquelle ce nombre n'est pas écrit. On a ainsi représenté le nombre pensé dans le système de la numération binaire.

Tableau de l'éventail mystérieux.

5	4	3	2	1
16	8	4	2	1
17	9	5	3	3
18	10	6	6	5
19	11	7	7	7
20	12	12	10	9
21	13	13	11	11
22	14	14	14	13
23	15	15	15	15
24	24	20	18	17
25	25	21	19	19
26	26	22	22	21
27	27	23	23	23
28	28	28	26	25
29	29	29	27	27
30	30	30	30	29
31	31	31	31	31
16	8	4	2	1

On simplifie le calcul, en écrivant au bas des colonnes les puissances correspondantes du nombre 2. Ces nombres sont habituellement écrits sur des cartons disposés en *éventail;* pour deviner un nombre qu'une personne a pensé, il suffira de lui présenter les cartons l'un après l'autre, en lui demandant si le carton contient le nombre pensé; puis de faire la somme des puissances de deux inscrites au bas de chacun des cartons où le nombre se trouve. D'ailleurs, on pourrait faire un jeu semblable avec les puissances de trois, mais ce serait un peu moins simple.

LA PROGRESSION DOUBLE.

Nous donnons, dans le tableau suivant, les trente-deux premiers nombres obtenus en doublant continuellement le nombre précédent, à partir de 2; ces nombres forment les puissances successives du nombre 2; dans le système binaire, on écrit ces nombres en faisant suivre l'unité de un, deux, trois, ..., soixante-quatre zéros; en Algèbre, on fait suivre le chiffre 2 d'un autre en plus petit caractère, placé au-dessus, nommé exposant, qui indique combien de fois le nombre 2 a été pris comme facteur.

Ce tableau représente ce que Fermat appelait la *progression double.*

On observera que pour multiplier les puissances de 2, la neuvième et la onzième, par exemple, il suffit d'ajouter les exposants 9 et 11, ce qui fait 20; on a ainsi :

$$2^9 \times 2^{11} = 2^{20}, \text{ ou } 512 \times 2048 = 1\,048\,576.$$

En général, l'exposant du produit de deux puissances d'un même nombre est égal à la somme des exposants des deux puissances; de même, l'exposant du quotient de deux puissances est égal à la différence des exposants du dividende et du diviseur.

Tableau des puissances de 2.

n	2^n	n	2^n
1	2	17	131 072
2	4	18	262 144
3	8	19	524 288
4	16	20	1 048 576
5	32	21	2 097 152
6	64	22	4 194 304
7	128	23	8 388 608
8	256	24	16 777 216
9	512	25	33 554 432
10	1 024	26	67 108 864
11	2 048	27	134 217 728
12	4 096	28	268 435 456
13	8 192	29	536 870 912
14	16 384	30	1 073 741 824
15	32 768	31	2 147 483 648
16	65 536	32	4 294 967 296

C'est sur l'observation et sur la généralisation de ces propriétés des puissances que repose, comme l'on sait, la théorie des logarithmes. Ainsi encore, si l'on veut calculer rapidement la soixante-quatrième puissance de 2, il faut multiplier par elle-même la trente-deuxième puissance, ce qui donne

$$2^{64} = 4\,294\,967\,296 \times 4\,294\,967\,296 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616.$$

On raconte que l'inventeur du jeu d'échecs avait demandé, comme récompense de sa découverte, un grain de blé pour la première case de l'échiquier, deux pour la seconde, quatre pour la troisième, et ainsi de suite en doublant, jusqu'à la soixante-quatrième, qui aurait dû recevoir 2^{63} grains de blé. On a, d'après une formule bien connue dans la théorie des progressions géométriques, et que l'on peut vérifier sur le tableau,

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Dans l'exemple précédent, le nombre total des grains de blé eût été de $2^{64} - 1$; c'est le nombre de vingt chiffres que nous avons écrit plus haut, et que l'on diminue d'une unité.

LES NOMBRES PARFAITS.

La progression double conduit à la connaissance des *nombres parfaits;* on appelle ainsi tout nombre entier qui est égal à la somme de ses diviseurs, ou préférablement, comme on disait autrefois, à la somme de ses *parties aliquotes*, attendu que cette dénomination exclut le nombre lui-même du rang de ses diviseurs. De plus, on appelait *nombre déficient*, tout nombre plus grand que la somme de ses parties aliquotes; et *nombre abondant*, un nombre plus petit que la somme de celles-ci.

La théorie des nombres parfaits impairs n'est pas complètement connue; quant aux nombres parfaits pairs, ils sont, sans exception, donnés par la formule

$$N = 2^{\alpha-1}(2^{\alpha} - 1),$$

dans laquelle le second facteur doit être un nombre premier; ainsi, dans cette formule, il ne faut pas donner à α toutes les valeurs entières, mais seulement toutes celles pour lesquelles le nombre $P_\alpha = 2^\alpha - 1$ est premier. Cette règle était connue d'Euclide; mais ce géomètre ne savait pas démontrer que l'on obtenait ainsi tous les nombres parfaits pairs.

On voit facilement que P_α ne peut être premier que si l'exposant α est lui-même un nombre premier; mais cela ne suffit pas. Il faudra s'assurer que $2^\alpha - 1$ est un nombre premier; c'est là une théorie très difficile, et, dans l'état actuel de la science, l'Arithmétique supérieure est impuissante à résoudre cette question lorsque l'exposant α est un nombre premier supérieur à 100. Les nombres parfaits connus actuellement sont les huit nombres du tableau suivant:

Tableau des nombres parfaits.

	α	$2^{\alpha-1}$	$2^\alpha - 1$	NOMBRES PARFAITS.
1	2	2	3	6
2	3	4	7	28
3	5	16	31	496
4	7	64	127	8 128
5	13	4 096	8 191	33 550 336
6	17	65 536	131 071	8 589 869 056
7	19	262 144	524 287	137 438 691 328
8	31	1 073 741 824	2 147 483 647	2 305 843 008 139 952 128

Dans la seconde colonne, on ne trouve pas pour α les valeurs 11, 23 et 29; cela tient à ce que les trois nombres

$$2^{11} - 1 \quad 2^{23} - 1, 2^{29} - 1$$

ne sont pas premiers, puisqu'ils sont respectivement divisibles par 23, 47 et 233.

On observera que les nombres parfaits sont toujours terminés par l'un des deux chiffres 6 ou 8; il en sera toujours ainsi, comme il est facile de le démontrer. Cela tient, d'une part, à la périodicité du dernier chiffre dans les puissances de deux, et, d'autre part, à ce que les nombres premiers α sont nécessairement, à l'exception des nombres 2 et 3, des multiples de 6 augmentés ou diminués de l'unité. Ainsi, lorsque α est un multiple de 6 diminué de l'unité, le nombre N est terminé par un 6, sans qu'il soit nécessaire que α soit premier; lorsque α est un multiple de 6 augmenté de l'unité, le nombre N est terminé par un 8. (*Voir* la Note VI, à la fin du volume.)

SEPTIÈME RÉCRÉATION.

—

LE JEU DU BAGUENAUDIER.

A Monsieur le docteur O.-J. Broch, ancien ministre de Norwége, correspondant de l'Institut.

« Comment peut estre créance d'homme si legiere que telles baguenaudes soient prinses pour doctrine, ou telles superstitions pour vraye religion. »

(ALAIN CHARTIER.)

« Les hommes sont si nécessairement fous, que ce serait être fou par un autre tour de folie, de ne pas être fou. »

(PASCAL. — *Pensées.*)

« La science ne nous a pas encore appris si la folie est ou n'est pas le sublime de l'intelligence; si presque tout ce qui est la gloire, si tout ce qui est la profondeur, ne vient pas d'une maladie de la pensée. »

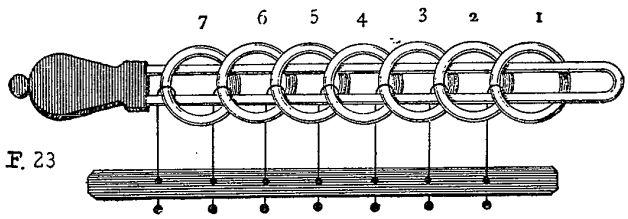
(EDGAR POE. — *Histoires extraordinaires.*)

SEPTIÈME RÉCRÉATION.

LE JEU DU BAGUENAUDIER.

Le baguenaudier est un instrument de jeu, formé d'anneaux enchevêtrés dans une navette, qu'il s'agit de séparer du système des anneaux. Nous conseillons l'emploi du baguenaudier de 7, 8 ou 9 anneaux; on le trouve facilement dans le commerce. Avec un plus grand nombre d'anneaux, le jeu devient absurde, car le nombre des opérations à faire pour

Fig. 36.



monter ou pour démonter le baguenaudier double continuellement par l'addition d'un anneau; on verra plus loin qu'il faudrait des

milliards de siècles pour démonter complètement un baguenaudier de 64 anneaux.

HISTORIQUE.

L'invention de ce jeu est fort ancienne ; on le trouve mentionné pour la première fois, je crois, parmi l'un des 222 traités de Cardan, dans l'ouvrage intitulé : *De subtilitate libri XXI,* dont la première édition parut à Nuremberg en 1550 ; il existe plusieurs autres éditions de cet ouvrage, et notamment une traduction française publiée par Richard Leblanc (Paris, 1556, in-4), sous le titre : *Les livres d'Hieronymus Cardanus, de la Subtilité et subtiles Inventions, ensemble les causes occultes et les raisons d'icelles.* Le XVe Livre de cet ouvrage, que l'on doit considérer comme une sorte d'encyclopédie de la science et de l'industrie au XVIe siècle, est consacré aux *Subtilités inutiles et incertaines;* nous reproduisons ici la traduction du passage concernant la description du baguenaudier, d'après Richard Leblanc (p. 291) :

« L'instrument, composé de sept anneaus, est inutile et est tel : Une paillette de fer large d'un doigt, longue d'une paume, mince et déliée, en laquelle sont sept trous rons, estrois et d'espaces égales, disposés selon la longueur de la paillette ou lamine : ces trous reçoivent sept vergettes menues presque de la hauteur d'une once, mobiles en bas, circonflexes en haut, à fin qu'elles retiennent les anneaus enclos de la grandeur d'un doigt, et les vergettes sont contenues par l'anneau ensuivant sous le fléchissement et curvature. Pour cette cause, tous les anneaus, excepté le premier, sont engardés par le précédent, qui ne sautent librement

hors la verge antérieure : tout est de fer, et mesmement la navette ou navicule est de fer, de laquelle i'ai exactement rendu la figure que voiés présente. Elle est longue et large selon la grandeur de la paillette ou lamine supposée. Par cet instrument un ieu est inventé de subtilité admirable. »

Après l'indication de la manœuvre de l'appareil, on trouve la conclusion suivante : « Ceci de soi est inutile; toutefois on peut le transférer aux serrures artificieuses de coffres (1). Telle subtilité est au ieu des échets; mais elle est plus délectable pour cause de la variété et contention; car, comme la navicule est d'invention très subtile en son genre, ainsi entre tous ieus les échets sont de grande subtilité. Autrefois, i'ai écrit et composé quatre livres des ieux. »

BIOGRAPHIE DE CARDAN.

La vie de Jérôme Cardan est l'une des plus étranges et des plus extraordinaires dont il soit fait mention dans l'histoire des sciences; c'est un tissu d'extravagances, d'actions incohérentes, viles et parfois criminelles, puisqu'il en vint à assassiner un homme qui l'avait volé au jeu. Scaliger a dit de lui qu'il était supérieur à tous les hommes, mais que souvent il descendait plus bas que les petits enfants; Leibniz, qui l'a déclaré fou et insensé, n'en admirait pas moins la supériorité de son esprit.

L'un des premiers, Cardan trouva la résolution de l'équation du

(1) M. le docteur O.-J. Broch, président de la commission du royaume de Norwége à l'Exposition universelle de 1878, m'a dit que, dans son pays, les habitants des campagnes se servent encore du baguenaudier pour fermer leurs bahuts et leurs sacs.

troisième degré et démontra la formule qui porte encore son nom; il entrevit la résolution de l'équation du quatrième degré, que l'on doit à son disciple Ferrari; il imagina un appareil employé dans la marine pour la suspension des boussoles, et probablement aussi l'engrenage connu sous le nom de *joint universel.*

Né à Pavie, en 1501, il professa successivement la dialectique, la métaphysique, les mathématiques; il exerça la médecine à Milan, de 1529 à 1550; après avoir parcouru l'Écosse, l'Angleterre, les Pays-Bas et l'Allemagne, il revint à Milan, où il vécut encore quelques années, partageant son temps entre le travail, la débauche et le jeu. Son fils aîné, médecin comme lui, empoisonna sa femme, et fut décapité; son second fils tomba dans de grands désordres; il le fit incarcérer plusieurs fois, puis lui coupa l'oreille et finalement le chassa de sa maison. Enfin il termina son existence infortunée, à Rome, à l'âge de soixante-quinze ans; il était alors pensionné par le pape Grégoire XIII. Scaliger et de Thou prétendent qu'ayant fixé lui-même l'année et le jour de sa mort, il se laissa mourir de faim pour que sa prédiction fût justifiée. La *Nouvelle Biographie générale* (Firmin Didot) contient une longue et intéressante biographie de Cardan, par M. Victorien Sardou, de laquelle nous avons extrait quelques-uns des renseignements qui précèdent.

BIOGRAPHIE DE WALLIS.

Le second auteur qui a écrit sur le baguenaudier est un illustre mathématicien anglais, du nom de Wallis, auquel on doit une formule bien curieuse pour la détermination du rapport de la circonférence au diamètre [1]. Né en 1616, mort en 1703, Wallis possédait à fond toutes les connaissances de son temps. « Dès mon enfance, dit-il, j'ai toujours, dans toutes sortes de sciences, voulu savoir le fond des choses, non par routine, ce qui les fait oublier bientôt, mais par raison et par principes, afin de former mon jugement. » Il fut professeur de géométrie à l'Université d'Oxford, en 1649; il fut ensuite chapelain du roi, au rétablissement des Stuarts. Doué d'une mémoire prodigieuse, il lui arriva, une nuit, d'extraire de tête la racine carrée d'un nombre de *cinquante* chiffres, et de la dicter le lendemain.

Le tome II de son *Traité d'Algèbre* (p. 472) contient la description et la manœuvre du baguenaudier, avec un grand luxe de détails et de figures très bien faites.

[1] Au Congrès de l'Association française, à Montpellier, M. Éd. Collignon, inspecteur général des Ponts et Chaussées, a présenté des développements fort curieux sur la formule de Wallis, afin d'arriver à démontrer l'incommensurabilité de toutes les puissances du rapport de la circonférence au diamètre.

C'est un préjugé, partagé par beaucoup de personnes, de croire à l'impossibilité démontrée de la quadrature du cercle. On sait bien que les nombres π et π^2 sont incommensurables; cependant si l'un des nombres π^4, π^8, π^{16},... était commensurable, on aurait résolu le problème de la quadrature du cercle. Cette observation n'a pas pour but d'engager quelques lecteurs dans cette recherche extrêmement difficile. Arago disait autrefois à l'Académie des Sciences qu'il avait constaté que les prétendues solutions de la quadrature du cercle étaient beaucoup plus nombreuses au printemps qu'à toute autre époque de l'année (*Voir* le tome II, p. 156.)

« Cardan, dit-il, en son livre *de la Subtilité*, parle de ce que nous allons faire connaître sur les anneaux enlacés; il classe cette subtilité parmi les inutiles, c'est-à-dire parmi celles qui ne touchent pas au gain, et qui se recommandent seulement comme pouvant mettre l'esprit en action; mais il en parle en termes si obscurs, que celui qui ne connaîtrait pas autrement la chose ne pourrait que difficilement deviner de quoi il s'agit. Nous nous sommes efforcé d'expliquer par des paroles l'objet en question; mais il serait plus facile de le faire connaître avec les doigts qu'avec la plume. La chose est d'une si grande subtilité et va si bien de pair avec l'Algèbre, qu'il est impossible de lui refuser ici un refuge. Toute la difficulté consiste à composer et à résoudre, à enlacer et à délacer.

« Il m'est impossible de dire quelle est l'ancienneté de cet objet; certainement on le connaissait avant Cardan, car cet auteur n'en parle pas comme d'une invention à lui propre. »

IMAGINATION D'UN CLERC DE NOTAIRE.

Ozanam, dans ses *Récréations mathématiques*, ne parle pas du baguenaudier; l'*Encyclopédie méthodique*, *dictionnaire des jeux*, en fait mention, mais c'est pour le placer après le jeu : *J'aime mon amant par B*, et pour décrire la suite des changements que l'on fait en démontant le baguénaudier quand tous les anneaux sont élevés, et en le ramenant à cet état.

Enfin, en 1872, un auteur ingénieux, qui avait gardé l'anonyme, a publié une brochure de seize pages in-8°, dont je dois la

communication à la bienveillance de M. le général Parmentier. Cet opuscule intitulé : *Théorie du Baguenodier, par un clerc de notaire lyonnais* (1), commence ainsi : « Lyon attire sur lui l'attention publique par son Exposition ; chacun des enfants de cette grande cité doit produire tout ce qui peut plaire aux visiteurs. Ce motif décide un modeste clerc de notaire à publier ses études sur le baguenodier ; le sujet est frivole, mais la théorie est neuve ; de plus, elle a été imaginée à Lyon. Cet opuscule aura atteint son but s'il montre que le baguenodier est un jouet instructif. »

L'auteur se livre d'abord à une discussion étymologique, de laquelle il paraît résulter que l'on doit écrire le nom de l'instrument avec un *o*, puisque ce nom vient probablement de nœud (*nodus*) de bagues. Après avoir indiqué les sources historiques que nous venons de mentionner, il expose une notation aussi simple qu'élégante des diverses configurations du baguenaudier, qui permet de fixer à chaque instant l'ordre du déplacement des anneaux ; aussi nous regrettions que l'auteur n'eût pas cru devoir livrer son nom au public, lorsque nous avons appris que l'estimable continuateur de Cardan et de Wallis est M. Louis Gros, conseiller à la cour d'appel de Lyon. La théorie qui va suivre n'est que le développement de l'idée fondamentale de l'auteur lyonnais et des observations qui nous ont été communiquées par M. Parmentier ; nous y avons ajouté quelques considérations qui feront comprendre que ce petit appareil, que bien des personnes regardent comme un joujou, renferme cependant, dans sa contexture variable à chaque instant, la représentation des diffé-

(1) Lyon, imprimerie d'Aimé Vingtrinier, rue Belle-Cordière.

rentes propriétés du système de la numération binaire et de la théorie des combinaisons.

DISCUSSION ÉTYMOLOGIQUE DE M. GROS.

« Au lieu de décrire longuement un objet qui est dans le commerce, rassurons le lecteur, déjà choqué de l'orthographe que j'ai adoptée : *baguenodier,* et non *baguenaudier.* Je ne suis pas un libre penseur, pas plus en orthographe qu'en religion et en politique; je me soumets à toutes les autorités légitimes, surtout à celle de l'Académie française.

« Cependant, j'ai un grain d'indépendance, et, quand je vois un mot orthographié d'une manière compliquée et contraire à l'étymologie, je propose une réforme.

« Quelle est la véritable étymologie du mot baguenodier? Consultons Ménage; il ne dit pas un mot du jouet dont nous nous occupons; mais il a des articles sur *bague*, *baguenaude*, *baguenauder*, *baguenaudier*.

« Il fait dériver *bague* de *bacca*, *que les Latins ont dit d'une perle, à cause de la ressemblance qu'ont les perles pour leur rondeur avec les bacques ou baies.*

« Les annotateurs de Ménage ne sont point satisfaits de cette explication; ils remarquent que *bague* ne vient point de *bacca*; ni une baie, ni une perle ne ressemblent à une bague.

« Ils font venir *bague* de la langue des Francs, de celle des Goths, de celle des Cimbres et de celle des Saxons; ils trouvent des mots analogues dans l'anglo-saxon, dans le vieux franc, dans l'allemand, dans l'irlandais, dans le suédois et dans l'anglais.

« Ces estimables annotateurs vivaient à une époque où le sanscrit n'était pas étudié; ne pourrait-on pas, à présent, trouver la racine primitive dans la langue sacrée des Indous, puisqu'elle est la mère de toutes les anciennes langues européennes?

« *Baguenaude,* fruit, et *baguenaudier,* arbuste, dérivent, suivant Caseneuve, de *bacca, qui est proprement le fruit rond de certains arbres, tels que sont le laurier, le lierre, le myrte et le houx; ce nom a été donné au baguenaudier à cause du petit fruit rond contenu dans sa cosse.*

« Ménage dit que de *bacca* on a fait *baccana, baccanalda, baccanaldarius.*

« Les annotateurs ne trouvent rien à redire à cela; je suis plus difficile qu'eux : la graine du *colutea,* pour parler le langage officiel moderne, ne ressemble point à celle du lierre et du houx; elle a la forme allongée d'un très petit haricot.

« Ce sont les mots extrêmement usuels qui se transforment beaucoup dans le langage; or, je ne crois pas que l'on ait jamais eu à parler souvent des grains renfermés dans les petites vessies du *colutea* et à leur donner trois noms successifs ou simultanés.

« Un glossaire de Rabelais fait dériver *baguenaude, futilité,* de *bague,* et *nade* (*nulle bague*).

« Ces conjectures n'ont point de fondements; j'ai d'autres idées, et les voici :

« Le baguenodier est un jeu très ancien; nous verrons bientôt que ce n'était pas une nouveauté il y a trois cents ans; on a dû lui donner un nom; celui qui s'est présenté tout naturellement est *nœud de bagues;* ce sont, en effet, des anneaux qui retiennent la navette par une certaine combinaison, comme deux brins de fil sont unis par une certaine manière de les contourner.

« Le mot *bague*, dans le sens d'*anneau*, était dans la langue depuis longtemps; en y joignant le mot *nodus*, ou son dérivé français nœud (avec *œ* en souvenir de l'*o* de *nodus*), on a fait *baguenodier*.

« Celui qui voit un homme sérieux passer de longs moments à élever et baisser les anneaux du baguenodier est invinciblement porté à dire : « En voilà un qui perd son temps; » de là s'occuper du nœud de bagues, *baguenoder* a pris la signification que nous connaissons bien.

« Faire éclater entre ses doigts le fruit du *colutea* est un plaisir champêtre auquel s'attache aussi forcément l'idée de perte de temps sans profit; on a donc employé dans cette circonstance le mot *baguenoder*, fait pour le nœud de bagues, et, par suite, l'arbuste a reçu le nom du jouet.

« Pourquoi a-t-on écrit *baguenauder* et non *baguenoder?* Il y a trois ou quatre cents ans, l'orthographe n'avait rien de fixe; chaque auteur avait la sienne, et même beaucoup d'auteurs ne s'occupaient point de ce détail : ils s'en rapportaient aux imprimeurs; Montaigne dit qu'il se contentait de recommander l'emploi de l'orthographe la plus ancienne dans l'impression de ses *Essais* (Livre III, Ch. IX). Tantôt on compliquait l'orthographe, comme lorsque d'*homo* on a fait *homme;* tantôt on la simplifiait, comme lorsque d'*auris* on a fait *oreille,* et d'*audere*, *oser*. Baguenoder a eu la mauvaise chance d'être compliqué d'un *au;* puis, pour justifier cet *au*, l'abbé Ménage a imaginé *baccana*, *baccanalda*, *baccanaldarius*.

« Ami lecteur, j'espère que, cela dit, vous me pardonnerez de ramener le mot *baguenodier* à l'orthographe étymologique. »

DESCRIPTION DU BAGUENAUDIER.

Cet instrument (*fig.* 36) se compose de deux parties principales : la *navette* et le *système des anneaux.*

La navette se compose essentiellement d'un fil métallique, ayant la forme d'un rectangle très allongé. Pour la commodité de la manœuvre, l'une des extrémités est munie d'une poignée, que l'on tient dans la main gauche pendant que l'on déplace les anneaux avec la main droite.

Le système des anneaux est formé :

1° D'un nombre quelconque d'anneaux égaux, dont le diamètre est à peu près le double de la largeur de la navette, et dont l'épaisseur est environ le quart de celle-ci; par conséquent, on peut faire passer la navette à travers l'anneau, tout aussi bien qu'un seul anneau, et même deux pris ensemble, à travers la navette;

2° D'une petite planchette rectangulaire de dimensions pareilles à celles de la navette ; elle est percée, sur sa longueur, de trous équidistants, en nombre égal à celui des anneaux de l'instrument;

3° De petites tiges ou verges métalliques, en nombre égal à celui des anneaux; l'une des extrémités de chaque tige passe librement dans l'un des trous de la planchette, derrière laquelle cette tige est retenue par un crochet; l'autre extrémité entoure l'un des anneaux.

Le système est agencé de telle sorte que chacune des tiges qui retient l'anneau se trouve passée dans l'intérieur de l'anneau suivant. Ainsi la tige du *premier anneau* est passée dans le deuxième;

celle du deuxième dans le troisième, et ainsi de suite ; mais la tige du *dernier anneau* ne passe dans aucun autre. Il y a donc une très grande différence dans la disposition du premier anneau et du dernier ; dorénavant, nous distinguerons les anneaux par les nombres 1,2,3,4,..., et nous supposerons la planchette disposée de telle sorte que le premier anneau soit placé à la droite.

On dit qu'un anneau est *monté* ou *levé* lorsque la tige qui lui correspond est passée dans l'intérieur de la navette, et que la navette est passée dans l'intérieur de l'anneau ; on dit que l'anneau est *baissé* ou *descendu*, dans le cas contraire ; le baguenaudier est *monté*, lorsque tous ses anneaux sont levés ; il est *démonté*, lorsque tous ses anneaux sont baissés ; alors la navette se trouve complètement séparée du système des anneaux.

DU DÉPLACEMENT D'UN ANNEAU.

Supposons que l'on tienne horizontalement, et de la main gauche, la navette du baguenaudier complètement monté, ainsi qu'on le vend dans le commerce ; il est facile de constater que le premier anneau peut être baissé ; pour cela, on le prend de la main droite, on tire la navette à gauche, et l'on passe l'anneau dans l'intérieur de la navette ; de cette façon le premier anneau se trouve baissé ; on le remonte par l'opération inverse. Lorsque le premier anneau est baissé, on ne peut déplacer le second, et on ne peut baisser que le troisième, ou le remonter par l'opération inverse ; mais si le premier et le troisième anneau sont baissés, on ne peut en baisser aucun autre.

Dans le cas général, il résulte de la construction même du

baguenaudier, que le déplacement d'un seul anneau est soumis aux principes suivants :

1° Dans une position quelconque des anneaux du baguenaudier, on peut toujours baisser le premier anneau s'il est levé, ou le lever s'il est baissé.

2° Pour qu'un anneau de rang quelconque puisse être déplacé, c'est-à-dire levé ou baissé, il faut et il suffit qu'il se trouve placé *immédiatement* à la gauche d'un anneau monté, et que celui-ci soit le seul anneau monté à la droite de l'anneau considéré.

Dans le cas où l'on ne déplace qu'un seul anneau à la fois, la marche du jeu est appelée *marche ordinaire.*

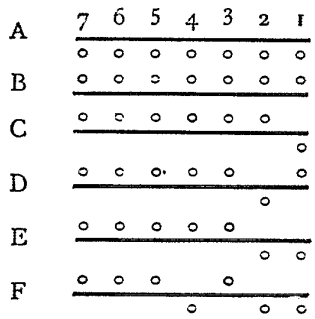
DU DÉPLACEMENT DE DEUX ANNEAUX.

Il y a exception, dans le déplacement des anneaux, pour la marche des deux premiers anneaux, qui peuvent être montés ou descendus, pris simultanément ; mais il n'existe aucun groupe de deux autres anneaux, ou de plus de deux anneaux, que l'on puisse faire marcher en même temps. Lorsque l'on emploie cette manœuvre simultanée des deux premiers anneaux, la marche du jeu est plus rapide; nous l'appellerons *marche accélérée.* On peut monter ou baisser simultanément les deux premiers anneaux dans une position quelconque des autres anneaux de l'appareil ; mais on verra facilement que si l'on doit les monter tous deux en même temps, on descend ensuite le premier. Dans ce qui suit, nous ne nous occuperons tout d'abord que de la marche ordinaire, qui est plus commode à considérer théoriquement ; nous donne-

rons ensuite un tableau qui permet d'en conclure immédiatement la théorie du jeu dans sa marche accélérée.

Pour représenter les diverses phases du jeu, nous figurerons la navette par une droite horizontale, les anneaux levés par des ronds placés au-dessus, dans leur situation respective, et les anneaux baissés, par des ronds placés au-dessous. Ainsi (*fig.* 37).

Fig. 37.



A désigne le baguenaudier de 7 anneaux, complètement démonté; B désigne le même appareil entièrement monté. Par un seul mouvement, on peut déduire C ou D de B, soit en baissant le premier anneau, soit en baissant le second; on peut aussi déduire E de B par un seul mouvement, en baissant simultanément les deux premiers anneaux; on peut aussi déduire E de D par le déplacement du premier anneau, toujours libre; mais on ne pourrait déduire immédiatement E de C. Ces observations s'appliquent encore, quelles que soient les positions des anneaux 4, 5, 6 et 7.

Dans la position C, on ne peut baisser que le troisième anneau;

de même, dans la position E, on ne peut baisser que le quatrième, pour produire la position F. Dans celle-ci, si l'on veut baisser le troisième anneau, il faut d'abord remonter les deux premiers, puis baisser le premier pour descendre le troisième.

PROBLÈME GÉNÉRAL DU BAGUENAUDIER.

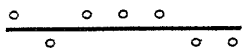
Cela posé, le problème général que nous allons résoudre est le suivant : *On donne deux dispositions quelconques des anneaux, sur la navette d'un baguenaudier de grandeur arbitraire ; déterminer l'ordre et le nombre des déplacements à opérer, pour passer d'une disposition à l'autre, en supposant que le nombre des mouvements des anneaux soit le plus petit possible. En particulier, déterminer l'ordre et le nombre minimum des déplacements des anneaux, pour monter ou pour démonter entièrement le baguenaudier.*

Nous supposerons d'abord qu'il s'agisse de la marche ordinaire en ne déplaçant qu'un seul anneau à la fois. Le problème général du baguenaudier se résout immédiatement au moyen de la notation ingénieuse de chacune des dispositions du baguenaudier, qui a été imaginée par l'auteur lyonnais. Tous les anneaux sont représentés, dans l'ordre de gauche à droite, par l'un des caractères **0** et **1**, avec les conventions suivantes. Le premier anneau levé, à partir de la gauche, est désigné par **1**, et les anneaux levés, situés à droite, sont alternativement représentés par **0** et **1**, sans tenir compte, dans cette alternance, des anneaux baissés ; quant aux anneaux baissés, ils sont indiqués, à leurs places respectives, par le signe du premier anneau levé à leur

gauche, et par 0, lorsqu'il ne s'en trouve aucun. En d'autres termes, en allant de gauche à droite, tout anneau levé implique une *variation* du signe de l'anneau, levé ou baissé, à gauche ; tout anneau baissé implique une *permanence* du signe de l'anneau à gauche. On trouvera plus loin le tableau des coups successifs du baguenaudier avec la figuration ordinaire dans la colonne *Baguenaudes*, et la notation de M. Gros dans la colonne *Binaires*.

MARCHE ORDINAIRE.

La notation du baguenaudier, que nous venons d'exposer, représente un nombre écrit dans le système de numération binaire. Considérons une position quelconque du baguenaudier :

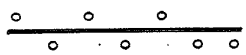


1 1 0 1 0 0 0;

dans cette position, on peut passer à deux autres : la première, en élevant le premier anneau, à la droite, ce qui donne

1 1 0 1 0 0 1;

la seconde, en baissant le quatrième anneau, ce qui donne



1 1 0 0 1 1 1.

Dans le premier déplacement, on a augmenté la notation correspondante du système binaire d'une unité ; dans le second, on a diminué cette notation d'une unité. Il en est de même pour

toute disposition des anneaux. Par conséquent, la marche ordinaire du baguenaudier correspond exactement à la formation successive de tous les nombres écrits dans la numération binaire; on monte le baguenaudier, en formant les nombres successivement à partir de zéro ; on démonte le baguenaudier, en suivant l'ordre décroissant des nombres entiers. D'ailleurs, on observera que pour monter le baguenaudier il suffit de déplacer, en commençant par la droite, le premier anneau représenté par **0**; pour le démonter, au contraire, il faut déplacer le premier anneau à droite représenté par le chiffre **1**.

Pour résoudre le problème général que nous avons posé, c'est-à-dire pour passer d'une disposition quelconque à une autre, on écrit les deux dispositions dans le système binaire, on prend la différence ; puis on transforme ce nombre dans le système décimal; on obtient ainsi le nombre minimum de déplacements pour passer de l'une à l'autre position. On effectuera ce changement en montant ou en démontant le baguenaudier, suivant que le premier nombre de la notation est plus petit ou plus grand que le second.

NOMBRE DES COUPS DE NAVETTE.

Il est facile, d'après cela, de déterminer le nombre des coups dans la marche complète du baguenaudier de 7 anneaux. Lorsque tous les anneaux sont montés, on a pour la notation

1 0 1 0 1 0 1,

ou, dans le système décimal,

$$2^6 + 2^4 + 2^2 + 1 = 85.$$

Donc, il faut opérer 85 déplacements pour monter ou pour démonter le baguenaudier de sept anneaux, dans la marche ordinaire. De même, pour le baguenaudier de dix anneaux, il faut 682 coups de navette, puisque l'on a

$$2^9 + 2^7 + 2^5 + 2^3 + 2 = 682.$$

En général, si l'on désigne par P_n le nombre des déplacements nécessaires pour monter ou pour démonter le baguenaudier de n anneaux, on a, pour n pair égal à $2k$,

$$P_{2k} = 2^{2k-1} + 2^{2k-3} + \ldots + 2^3 + 2 = \frac{2^{2k+1} - 2}{3},$$

et pour n impair égal à $2k + 1$,

$$P_{2k+1} = 2^{2k} + 2^{2k-2} + \ldots + 2^2 + 1 = \frac{2^{2k+2} - 1}{3}.$$

On peut réunir ces deux formules en une seule, en disant que P_n est toujours égal au plus grand nombre entier contenu dans le tiers de 2^{n+1}.

Nous donnons, dans le tableau qui termine cette récréation, la figuration des seize premiers coups ascendants du baguenaudier de 5, 6 ou 7 anneaux; la colonne n indique la succession des coups dans la marche ordinaire, le tableau contient aussi la figuration des quinze derniers coups du baguenaudier de 7 anneaux; on observera, en effet, que, bien que le baguenaudier soit monté par 85 changements, on peut encore *compliquer l'état de situation* des anneaux jusqu'au 127e coup, pour se préparer à monter le huitième anneau comme s'il existait. C'est à cette différence entre le baguenaudier monté et le baguenaudier plus compliqué, que l'on doit attribuer la divergence des calculs des trois auteurs qui ont écrit sur cet instrument. En général, pour arriver à l'état le

plus compliqué du baguenaudier de n anneaux dans la marche ordinaire, il faut un nombre de dérangements égal au nombre formé par n unités dans le système binaire, c'est-à-dire $2^n - 1$.

Ce nombre est précisément le total des combinaisons de n objets pris un à un, deux à deux, ..., n à n, de telle sorte que ce jeu donne la représentation de toutes les combinaisons, sans répétition, des n objets, ainsi que l'ordre dans lequel on doit numéroter les combinaisons.

SUR LES COMBINAISONS.

En général, on sait que l'on appelle combinaisons simples, ou sans répétition, de n lettres prises p à p, toutes les dispositions de p lettres qui ne diffèrent que par le choix des objets, et non par l'ordre dans lequel ils sont placés. On désigne habituellement ce nombre par $C_{n,p}$, et l'on a

$$1 + C_{n,1} + C_{n,2} + \ldots + C_{n,n} = 2^n.$$

Dans les cours d'algèbre, on démontre ce théorème par la formule du binôme de Newton, qui donne le développement de $(x+1)^n$, en supposant ensuite x égal à l'unité. Cependant ce théorème sur les combinaisons paraît avoir été connu bien avant la formule du binôme; voici la démonstration donnée par les anciens auteurs; elle repose sur l'idée fondamentale qui préside à l'accroissement des sciences mathématiques, c'est-à-dire sur l'observation et sur l'induction.

Prenons, par exemple, quatre lettres a, b, c, d; formons toutes

les combinaisons possibles de ces quatre lettres; ajoutons-y l'unité; nous avons le tableau suivant :

1,
a, *b*, *c*, *d*,
ab, *ac*, *ad*, *bc*, *bd*, *cd*,
abc, *abd*, *acd*, *bcd*,
abcd.

Le nombre total des combinaisons est 2^4; prenons maintenant une cinquième lettre *e*; formons un nouveau tableau en ajoutant cette lettre à toutes les combinaisons du tableau précédent, nous avons, en plus,

e,
ae, *be*, *ce*, *de*,
abe, *ace*, *ade*, *bce*, *bde*, *cde*,
abce, *abde*, *acde*, *bcde*,
abcde.

Le nombre des combinaisons possibles de cinq lettres est le double de celui de quatre lettres ou 2^5, et ainsi de suite. On retranche ensuite l'unité du tableau.

DURÉE DE LA MANŒUVRE.

Depuis la publication, dans la *Revue scientifique*, de notre article sur le baguenaudier, nous avons reçu de M. L. Gros une lettre intéressante, de laquelle nous extrairons le passage suivant : « Je regrette de n'avoir pas indiqué, dans ma théorie, le temps

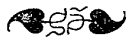
qui est nécessaire pour monter ou démonter le baguenodier. Je l'ai fait dans une note très réduite que je n'ai pas publiée. Je vais vous donner ces indications dont vous pourrez tirer parti, si vous les trouvez bonnes.

« Le baguenodier est toujours livré avec un nombre impair d'anneaux. Cela est utile à ceux qui savent que, pour démonter le baguenodier dont tous les anneaux sont élevés, il faut commencer par abaisser le premier, puis le troisième anneau. Celui qui n'est pas averti abaisse les deux premiers anneaux, puis le quatrième; il s'éloigne de son but et il tend vers l'état extrême, où la navette ne contient que la verge du dernier anneau.

« Combien faut-il de temps pour monter ou démonter le baguenodier? On fait sans peine 64 changements par minute : en se hâtant beaucoup, on peut arriver à 80. Mais admettons 64 comme un nombre moyen :

5	anneaux	tous élevés	exigent	21	changements, soit	20^s;
7	—	—	—	85	—	1^m20^s;
9	—	—	—	341	—	5^m20^s;
11	—	—	—	1365	—	21^m20^s;
13	—	—	—	5461	—	$1^h25^m20^s$.

« De même, 25 anneaux exigeraient plus de $349\,500^m$; par conséquent, pour démonter un baguenodier de 25 anneaux, il faudrait, à raison de 10 heures par jour, plus de 582 jours. »



MARCHE ACCÉLÉRÉE.

Nous avons encore donné, dans le tableau final, une colonne N qui indique le nombre des déplacements dans la marche

accélérée. Ce tableau fait voir que la marche accélérée est soumise aux règles suivantes :

1° Lorsque l'on monte le premier anneau, on doit monter en même temps le second;

2° Lorsque l'on a monté les deux premiers anneaux, on doit ensuite baisser le premier.

Le tableau montre, de plus, que huit coups consécutifs de la marche ordinaire, de 1 à 8, de 9 à 16, ..., correspondent à six dans la marche accélérée; par conséquent, si q désigne le quotient, et $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ou 0 le reste de la division de n par 8, on a le tableau suivant de correspondance

$$\begin{array}{ll} n = 8q + 1,2, & N = 6q + 1, \\ n = 8q + 3,4,5, & N = 6q + 2,3,4, \\ n = 8q + 6,7, & N = 6q + 5, \\ n = 8q. & N = 6q. \end{array}$$

Il sera facile de déterminer, dans la marche accélérée, le nombre de coups nécessaires pour passer d'une position à une autre. En particulier, si l'on désigne par Q_n le nombre des déplacements dans le montage ou dans le démontage accéléré, on trouve, suivant que n est impair et égal à $2k + 1$, ou pair, et égal à $2k$,

$$Q_{2k+1} = 2^{2k} \quad \text{et} \quad Q_{2k} = 2^{2k-1} - 1,$$

résultat obtenu par M. Parmentier par une voie différente.

On trouvera encore que l'expression

$$3 . 2^{n-2} - 1$$

représente le nombre des coups qui correspondent à l'état le plus compliqué du baguenaudier de n anneaux dans la marche accélérée.

TABLEAU DES DEUX MARCHES DU BAGUENAUDIER.

Les seize premiers coups.

N.	*n.*	BAGUENAUDES.	BINAIRES.
1	1	——— o o o o o o o	0 0 0 0 0 0 1
	2	——— o o o o o o o	0 0 0 0 0 1 0
2	3	——— o o o o o o o	0 0 0 0 0 1 1
3	4	——— o o o o o o o	0 0 0 0 1 0 0
4	5	——— o o o o o o o	0 0 0 0 1 0 1
5	6	——— o o o o o o o	0 0 0 0 1 1 0
	7	——— o o o o o o o	0 0 0 0 1 1 1
6	8	——— o o o o o o o	0 0 0 1 0 0 0
7	9	——— o o o o o o o	0 0 0 1 0 0 1
	10	——— o o o o o o o	0 0 0 1 0 1 0
8	11	——— o o o o o o o	0 0 0 1 0 1 1
9	12	——— o o o o o o	0 0 0 1 1 0 0
10	13	——— o o o o o o o	0 0 0 1 1 0 1
11	14	——— o o o o o o	0 0 0 1 1 1 0
	15	——— o o o o o o o	0 0 0 1 1 1 1
12	16	——— o o o o o o o	0 0 1 0 0 0 0

TABLEAU DES DEUX MARCHES DU BAGUENAUDIER.

Les quinze derniers coups.

N.	*n.*	BAGUENAUDES.	BINAIRES.
85	113	o o o	1 1 1 0 0 0 1
	114	o o o o o o	1 1 1 0 0 1 0
86	115	o o o o	1 1 1 0 0 1 1
87	116	o o o o o o o	1 1 1 0 1 0 0
88	117	o o o o o	1 1 1 0 1 0 1
89	118	o o o o o	1 1 1 0 1 1 0
	119	o o o o o o	1 1 1 0 1 1 1
90	120	o o o o o o	1 1 1 1 0 0 0
91	121	o o o o o	1 1 1 1 0 0 1
	122	o o o o o o o	1 1 1 1 0 1 0
92	123	o o o o o o	1 1 1 1 0 1 1
93	124	o o o o o o	1 1 1 1 1 0 0
94	125	o o o o o o o	1 1 1 1 1 0 1
95	126	o o o o o o o	1 1 1 1 1 1 0
	127	o o o o o o o	1 1 1 1 1 1 1

HUITIÈME RÉCRÉATION.

LE JEU DU TAQUIN.

A Monsieur Ange Laisant, député de la Loire-Inférieure, docteur ès sciences mathématiques.

« Ah! ah! vous voilà, monsieur le philosophe! Que faites-vous ici parmi ce tas de fainéants? Est-ce que vous perdez aussi votre temps à pousser le bois? »

(DIDEROT. — *Le Neveu de Rameau.*)

HUITIÈME RÉCRÉATION.

—

LE JEU DU TAQUIN.

HISTORIQUE.

Le jeu connu actuellement sous le nom de *Jeu du Taquin* a été imaginé en Amérique, vers la fin de 1878, par un sourd-muet qui se proposa, par hasard, de ranger dans une boîte des numéros qui s'y trouvaient déplacés, sans les en faire sortir. C'est là l'origine qui m'a été indiquée, au congrès de Reims de l'Association française pour l'Avancement des Sciences, par M. Sylvester, correspondant de l'Académie des Sciences de Paris, professeur de l'Université J. Hopkins, à Baltimore.

Dès son apparition, il obtint une grande vogue à Baltimore, à Philadelphie et dans les principales villes des États-Unis de l'Amérique du Nord. Peu après, il fut importé en France, et offert en prime, par divers journaux politiques et illustrés, sous le nom de *double casse-tête gaulois*. Son succès en Europe a été encore plus grand qu'en Amérique. Ce n'est pas la première fois

qu'un pareil engouement s'est produit chez nous. Bachaumont raconte qu'en 1746 les polichinelles et les arlequins, à pieds et à bras mobiles, faisaient fureur. « On ne peut plus aller, dit-il, dans aucune maison, qu'on n'en trouve de pendus à toutes les cheminées. On en fait présent à toutes les femmes et filles, et la faveur en est au point que les boulevards en sont remplis pour les étrennes. »

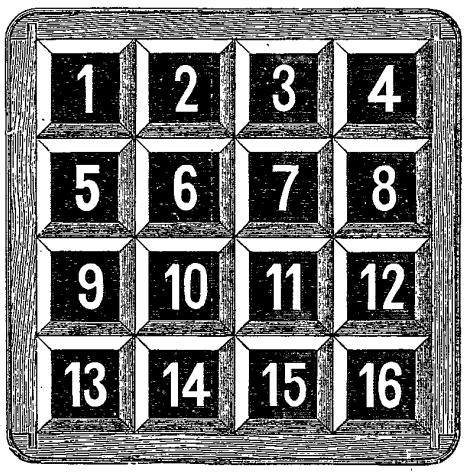
La théorie mathématique de ce jeu a été publiée pour la première fois, dans le Journal de mathématiques de M. Sylvester (¹). Cette théorie a été donnée par M. Woolsey Johnson, d'Annapolis, et généralisée par M. W.-E. Story. Nous avons d'abord profité des *Notes on the 15" Puzzle* de ces deux auteurs; mais depuis, nous avons simplifié les démonstrations; nous indiquons ultérieurement des généralisations et des extensions considérables de ce jeu. Ce jeu fort intéressant est la représentation sensible d'une partie d'une importante théorie d'algèbre, imaginée par Leibniz, et connue actuellement sous le nom de théorie des déterminants. Aussi, avec les rédacteurs de l'*American journal*, doit-on considérer la théorie et la manœuvre de ce jeu comme une sorte d'introduction à l'étude de cette partie de l'algèbre moderne.

(¹) *American Journal of mathematics pure and applied*, published under the auspices of the Johns Hopkins University. Baltimore, 1879.

DÉFINITION DU TAQUIN.

Sur le fond d'une boîte carrée, ou sur un échiquier de seize cases, on place dans un ordre quelconque seize cubes ou pions numérotés de 1 à 16; puis, on enlève du casier un cube quelconque, de telle sorte qu'il se trouve une case vide. Cela fait, il faut par le glissement des cubes, en profitant de la case vide, ramener les

Fig. 38.



Position fondamentale.

pions dans l'ordre régulier, puis replacer le cube enlevé sur la case vide, de manière à obtenir la position fondamentale représentée dans la *fig.* 38.

Supposons que l'on ait placé les cubes sur le fond de la boîte, et enlevé le numéro 16, conformément à la *fig.* 39, qui est l'une

Fig. 39.

7	4	6	11
8	5		2
9	3	14	12
15	13	1	10

Une position initiale.

des positions initiales. Dans celle-ci, on ne peut déplacer tout d'abord que l'un des cubes numérotés 5, 6, 2 ou 14, en faisant glisser l'un deux sur la case vide; puis on peut continuer de même. Il y a donc lieu de se demander combien il existe de positions initiales, puis de rechercher si l'on peut ramener à la position fondamentale toutes les positions initiales; enfin quelle doit être la marche à suivre pour résoudre le problème proposé.

Nous démontrerons qu'il existe plus de vingt trillions de positions initiales; on peut donc dire, avec raison, que le taquin est un *jeu à combinaisons toujours nouvelles.* Plus exactement, le nombre des positions initiales est

20 922 789 888 000;

on peut ramener la moitié d'entre elles à l'une quelconque des quatre positions directes, dans lesquelles le numéro 1 est placé

aux extrémités de la première diagonale du carré (*fig* 40 à 43) :

Fig. 40. — Ordre L_1.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Fig. 41. — Ordre C_1.

1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	16

Fig. 42. — Ordre C_3.

16	12	8	4
15	11	7	3
14	10	6	2
13	9	5	1

Fig. 43. — Ordre L_3.

16	15	14	13
12	11	10	9
8	7	6	5
4	3	2	1

Les quatre positions directes.

On peut toujours ramener l'autre moitié à l'une quelconque des quatre positions inverses dans lesquelles le numéro 1 est placé

aux extrémités de la seconde diagonale du carré (*fig.* 44 à 47) :

Fig. 44. — Ordre L_2.

4	3	2	1
8	7	6	5
12	11	10	9
16	15	14	13

Fig. 45. — Ordre C_2.

13	9	5	1
14	10	6	2
15	11	7	3
16	12	8	4

Fig. 46. — Ordre C_4.

4	8	12	16
3	7	11	15
2	6	10	14
1	5	9	13

Fig. 47. — Ordre L_4.

13	14	15	16
9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4

Les quatre positions inverses.

En d'autres termes, nous démontrerons que l'on peut toujours ranger les cubes du taquin ordinaire de seize cases, suivant l'ordre naturel, en plaçant le premier à un coin quelconque du carré, ou au coin adjacent.

Mais, pour la résolution de ces divers problèmes, il est indispensable d'entrer dans quelques explications élémentaires sur

la théorie des *permutations rectilignes* et des *permutations circulaires.*

LES PERMUTATIONS RECTILIGNES.

Nous avons déjà indiqué, dans notre quatrième récréation, sur le problème des huit reines, la formule principale de cette théorie, en démontrant que le nombre des manières de ranger en ligne droite dix objets différents est égal au produit des dix premiers nombres. Plus généralement, en désignant par n le nombre des objets, et par N le nombre des arrangements en ligne droite, ou des *permutations rectilignes*, on a la formule

$$N = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n.$$

Ainsi, pour sept objets, il y a 5040 permutations. On trouve ce résultat dans un ancien ouvrage qui a pour titre : *Récréations mathématiques et physiques qui contiennent les problèmes et les questions les plus remarquables, et les plus propres à piquer la curiosité, tant des mathématiques que de la physique: le tout traité d'une manière à la portée des lecteurs qui ont seulement quelques connaissances legères de ces sciences*, par M. Ozanam, de l'Académie royale des sciences. Paris, 1778.

La première édition de cet ouvrage amusant date de 1692; la seconde édition renferme quelques erreurs. On y rencontre la question suivante : « Sept personnes devant dîner ensemble, il s'élève entre elles un combat de politesse sur les places (c'est, sans aucun doute, dans quelque ville de province éloignée de la capitale, ajoute naïvement le commentateur); enfin quelqu'un voulant terminer la contestation propose de se mettre à table comme l'on

se trouve, sauf à dîner le lendemain et les jours suivants, jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les arrangements possibles. On demande combien de dîners devront être donnés pour cet effet. »

Le nombre des permutations est de 5040; à un dîner par jour, cela fait près de quatorze ans pour vider la querelle. Et dire que si l'on se fût trouvé treize à table, il eût fallu, pour cela, plusieurs millions d'années. Cela donne à penser et tend à prouver qu'il ne faut pas livrer un tel combat de politesse, sur les places, dans un dîner où il y a beaucoup de monde.

LES PERMUTATIONS CIRCULAIRES.

Nous devons faire une remarque sur la solution d'Ozanam; l'auteur considère toutes les places comme absolument distinctes; cependant lorsque les convives sont placés autour d'une table ronde, et que l'on ne tient pas compte du voisinage de la cheminée, de la porte ou d'une fenêtre, la position respective ne change pas, si, à un signal donné, les convives se lèvent tous et vont s'asseoir sur le siège de leur voisin de droite; doit-on alors considérer ces deux dispositions comme distinctes? Non, en vérité, si la table est ronde; et comme les convives peuvent encore se déplacer simultanément d'un rang vers la droite, et ainsi six fois successivement, on est amené à reconnaître que l'auteur a compté comme distinctes sept *permutations rectilignes* qui ne font qu'une seule et même *permutation circulaire*. En conséquence, le nombre des dîners des sept convives ou des permutations circulaires de sept objets n'est que le septième de 5040 ou 720.

En outre, on doit observer qu'au lieu de se placer de gauche à droite, les convives peuvent tous se placer de droite à gauche, de telle sorte que le voisin de droite est devenu celui de gauche, et inversement. Il faut donc encore diviser par 2 le nombre trouvé; cela ne fait plus que 360 dîners, et les convives en seront quittes à la fin de l'année.

Il nous reste à parler des dérangements produits par ces permutations; cela fait, nous reprendrons le casse-tête.

LES DÉRANGEMENTS.

Avec deux objets, les chiffres 1 et 2, par exemple, on forme les deux permutations rectilignes

12 et 21.

Dans la première, les objets sont rangés dans l'ordre naturel; dans la seconde, il y a inversion de cet ordre; on dit alors que la permutation contient *un dérangement*, parce que le chiffre 2 est placé avant le chiffre 1.

Pour former les permutations des trois chiffres 1, 2, 3, on place le chiffre 3 après l'une des deux permutations précédentes, et l'on a ainsi

123 et 213;

on n'a introduit aucun dérangement nouveau, puisque le chiffre 3 vient après 1 et 2, dans l'ordre naturel. Mais si nous faisons avancer ce chiffre d'un rang vers la gauche,

132 et 231,

nous introduisons alors un dérangement dans la première permutation, et un nouveau dérangement dans la seconde ; en faisant avancer encore le chiffre 3, comme ci-dessous,

312 et **321**,

la permutation **312** contient deux dérangements, et la suivante **321** en contient trois. Il y a lieu, dès maintenant, de donner la définition du dérangement ; il y a *dérangement* ou *inversion* dans une suite de nombres différents écrits sur une ligne horizontale dans un ordre quelconque, toutes les fois qu'un nombre se trouve placé à la gauche d'un nombre plus petit.

Pour compter le nombre des inversions d'une permutation. on peut procéder de deux manières différentes : 1° en comptant pour chaque terme le nombre des termes qu'il *commande*, ou qui sont à sa droite, plus petits que lui, et faisant le total pour tous les termes ; 2° en comptant pour chaque terme le nombre de ceux qu'il *subit*, ou qui sont à sa gauche plus grands que lui. Il est évident que, par les deux procédés, on obtiendra le même résultat final ; cependant, suivant les cas, il est préférable d'employer l'un ou l'autre de ces deux procédés.

LES DEUX CLASSES DES PERMUTATIONS.

Cela posé, on divise les permutations de n nombres en deux classes ; on range dans la *première classe,* avec celle qui ne contient aucun dérangement, en écrivant les nombres dans l'ordre naturel, toutes les permutations qui contiennent un nombre

pair de dérangements ; on range dans la *seconde classe* toutes les permutations qui contiennent un nombre impair de dérangements. Pour indiquer qu'une permutation est de la première classe, nous la ferons précéder du signe +, et pour indiquer qu'une permutation est de la seconde classe, nous la ferons précéder du signe —. Ainsi la permutation + **12** donne

$$+\,\mathbf{123},\ -\,\mathbf{132},\ +\,\mathbf{312},$$

et la permutation — **21** donne

$$-\,\mathbf{213},\ +\,\mathbf{231},\ -\,\mathbf{321}.$$

On constate que les classes des permutations de deux ou de trois nombres sont également partagées; il en est toujours ainsi. En effet pour former les permutations de quatre éléments **1,2,3,4**, on place d'abord le nombre **4** à la fin de chacune des permutations de trois éléments, ce qui ne change pas la classe de la permutation ; en faisant rétrograder le chiffre **4** successivement vers la gauche, on change successivement le signe de la permutation ; ainsi + 231 donne successivement, pour quatre éléments,

$$+\,\mathbf{2314},\ -\,\mathbf{2341},\ +\,\mathbf{2431},\ -\,\mathbf{4231}.$$

Le tableau suivant renferme toutes les permutations de quatre éléments, avec le signe de la classe à laquelle elles appartiennent; nous indiquons, dans les deux premières lignes, les deux permutations de deux éléments, et les six permutations de trois éléments, qui permettent d'établir la *généalogie* des permutations des quatre éléments.

Généalogie des permutations.

+ 12			— 21		
+ 123	— 132	+ 312	— 213	+ 231	— 321
+ 1234	— 1324	+ 3124	— 2134	+ 2314	— 3214
— 1243	+ 1342	— 3142	+ 2143	— 2341	+ 3241
+ 1423	— 1432	+ 3412	— 2413	+ 2431	— 3421
— 4123	+ 4132	— 4312	+ 4213	— 4231	+ 4321

On voit que le nombre des signes + est égal au nombre des signes — ; par suite, le nombre des permutations de chaque classe est le même. Il est facile de généraliser et de voir qu'il en est toujours ainsi. On a donc la proposition suivante, dans laquelle on considère zéro comme un nombre pair :

THÉORÈME I. — *Les permutations de n objets se divisent en deux classes également nombreuses, suivant que le nombre des inversions est pair ou impair.*

On détermine facilement la classe d'une permutation en calculant le nombre de ses inversions, ainsi qu'il a été dit plus haut, et en supprimant continuellement les multiples de 2.

LES ÉCHANGES.

Il est facile de voir que si l'on échange dans une permutation les places de deux nombres consécutifs, on produit un changement de classe, puisque l'on a ainsi augmenté ou diminué le

nombre des inversions d'une unité. Plus généralement, si l'on déplace un élément de manière à lui faire franchir un nombre quelconque p d'autres éléments, le nombre des inversions est modifié d'une quantité qui est de même parité que p; en d'autres termes, si l'on déplace un élément en lui faisant franchir 2, 4, 6, 8, ... autres, la classe de la permutation n'est pas modifiée, et si l'on déplace un élément en lui faisant franchir 1, 3, 5, 7, ... autres éléments consécutifs, la classe de la permutation est changée. Cela posé, on a la proposition suivante, connue sous le nom de *théorème de Bézout*.

THÉORÈME II. — *L'échange de deux éléments quelconques d'une permutation change la classe de la permutation. Plus généralement, un nombre pair d'échanges d'éléments quelconques d'une permutation n'en modifie pas la classe; un nombre impair d'échanges produit sur la permutation primitive un changement de classe.*

En effet, il suffit évidemment de démontrer que l'échange de deux éléments quelconques produit un changement de classe. Supposons que l'on échange dans la permutation

$$\ldots \mathrm{R}\,abc \ldots kl\,\mathrm{S} \ldots,$$

les éléments R et S séparés par p éléments; si l'on fait franchir à S les p éléments qui précèdent, on obtient

$$\ldots \mathrm{RS}\,abc \ldots kl \ldots;$$

puis, si l'on fait franchir à R les $(p+1)$ éléments qui suivent, on obtient

$$\ldots \mathrm{S}\,abc \ldots kl\,\mathrm{R} \ldots;$$

le nombre des inversions est donc modifié d'un nombre de même parité que $(2p+1)$ et, par suite, d'un nombre impair.

C. Q. F. D.

On peut encore démontrer le théorème suivant : *Le nombre total des inversions pour toutes les permutations de n lettres est la moitié du produit du nombre P_n des permutations de n lettres par le nombre $C_{n,2}$ des combinaisons des n lettres prises deux à deux.* On peut arriver à ce résultat de deux manières différentes : par la méthode analytique ou par la méthode synthétique.

Méthode analytique. — Désignons par D_n le nombre total des dérangements ou des inversions pour toutes les permutations de n lettres. Écrivons d'abord $(n+1)$ fois le tableau des permutations de n lettres ; nous avons ainsi $(n+1)D_n$ dérangements; plaçons maintenant le $(n+1)^{\text{ième}}$ élément à la dernière place, à l'avant-dernière, ..., à la seconde, à la première place dans chacune des permutations précédentes, nous produisons successivement

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ (n-1),\ n$$

nouveaux dérangements, ou en tout $\frac{n(n+1)}{2}$; on a donc

$$D_{n+1} = (n+1)D_n + P_n\frac{n(n+1)}{2}.$$

Posons $D_n = P_n Q_n$, il vient la formule

$$Q_{n+1} = Q_n + \frac{n}{2}.$$

Par suite, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, on a successivement

$$Q_2 = Q_1 + \frac{1}{2},\ Q_3 = Q_2 + \frac{2}{2},\ \ldots,\ Q_n = Q_{n-1} + \frac{n-1}{2};$$

et en ajoutant toutes ces égalités

$$Q_n = \frac{1+2+\ldots+(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{4}.$$

Méthode synthétique. — Le nombre total des inversions d'une permutation et de la permutation écrite dans l'ordre renversé est égal au nombre des combinaisons de n objets pris deux à deux, ou $C_{n,2} = \frac{1}{2}n(n-1)$;

par conséquent, en réunissant les deux permutations, on trouve au total

$$D_n = \frac{1}{2} P_n C_{n,2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

REMARQUE. — On trouverait de même la somme de tous les nombres formés par les permutations des deux, trois, quatre,..., neuf premiers chiffres. Ainsi la somme des nombres formés par les permutations des cinq chiffres 1, 2, 3, 4, 5 est

$$\frac{1}{2} P_5 \times 66666.$$

LES CYCLES.

On peut encore déterminer la classe d'une permutation par la méthode plus expéditive, dite des *cycles*, due à Cauchy. Considérons une permutation quelconque,

8, 6, 12, 1, 5, 14, 2, 11, 13, 15, 4, 9, 3, 10, 7;

plaçons au-dessus de chacun de ses termes les nombres de la suite naturelle, ainsi qu'il suit :

Nombres : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15;
Pions : 8, 6, 12, 1, 5, 14, 2, 11, 13, 15, 4, 9, 3, 10, 7.

Au-dessous du nombre 1 se trouve le numéro 8; au-dessous de 8 le numéro 11; au-dessous de 11 le numéro 4, au-dessous de 4 nous retrouvons le numéro 1. On forme ainsi

Premier cycle : 1, 8, 11, 4;

en partant du nombre 2, on forme

Second cycle : 2, 6, 14, 10, 15, 7;

en partant du nombre 3, qui ne figure pas dans les cycles précédents, on forme

Troisième cycle : 3, 12, 9, 13;

enfin il reste le cycle formé par un seul nombre

Quatrième cycle : 5.

Il est facile de voir que l'échange de deux pions quelconques augmente ou diminue d'une unité le nombre des cycles de la permutation, suivant que les pions échangés appartiennent au même cycle ou à des cycles différents. Par suite, la variation du nombre des cycles est de même parité que le nombre des échanges entre les termes de la permutation. Donc :

THÉORÈME III. — *Deux permutations appartiennent à une même classe ou à deux classes distinctes, suivant que les nombres de leurs cycles sont ou ne sont pas de même parité.*

Pour déterminer la classe, on remarquera que la permutation suivant l'ordre naturel contient un nombre de cycles égal au nombre des éléments de la permutation [1].

[1] Le numéro du 25 septembre 1880 du journal *la Nature* contient un article intitulé : *Le dernier mot du taquin*, par M. Piarron de Mondésir. On y retrouve, sous une forme peu différente, le procédé des cycles. Si l'on range les cycles en deux ordres, suivant qu'ils contiennent un nombre pair ou impair de termes, on a le théorème suivant : Deux permutations appartiennent à la première classe ou à la seconde, suivant que le nombre des cycles d'ordre *pair* est pair ou impair. D'un autre côté, ce résultat m'a été indiqué par M. Delannoy, ancien élève de l'École Polytechnique.

LES ÉCARTS.

Considérons une permutation quelconque des n premiers nombres

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p, \ldots, a_n;$$

appelons *écart* d'un terme la différence entre sa valeur numérique et le rang qu'il occupe; désignons-le par e, nous aurons

$$e_p = a_p - p.$$

Cela posé, on a le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Si, dans une permutation des n premiers nombres, on supprime un terme quelconque, la variation du nombre des inversions est de même parité que l'écart du terme.*

Soient a_p le terme enlevé, c_p et s_p le nombre des inversions commandées et subies par lui; la variation du nombre des inversions est évidemment $c_p + s_p$. Mais le nombre des termes qui précèdent a_p est $(p - 1)$, parmi lesquels s_p sont plus grands que lui, et $(p - 1 - s_p)$ sont plus petits que lui. D'autre part, le nombre des termes plus petits qui le suivent est c_p; en ajoutant les deux dernières expressions, on trouve le nombre total des nombres plus petits que a_p, c'est-à-dire $(a_p - 1)$; on a donc

$$a_p - 1 = p - 1 - s_p + c_p,$$

ou bien

$$a_p - p = c_p - s_p;$$

par suite, en ajoutant le nombre pair $2s_p$, on a

$$e_p \equiv c_p + s_p, \qquad (\text{Mod. } 2). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

NOMBRE DES POSITIONS INITIALES.

Si l'on désigne la case vide par **0**, on peut représenter la situation du taquin, à un instant quelconque, en écrivant dans l'ordre de la position fondamentale de la *fig.* 38 les numéros des cubes mobiles; ainsi la *fig.* 39 donne la permutation des seize nombres

7, 4, 6, 11 | 8, 5, **0**, 2 | 9, 3, 14, 12 | 15, 13, 1, 10.

La position de la case vide étant arbitraire, le nombre des positions initiales du taquin est égal au nombre des permutations rectilignes de seize éléments ou au produit des seize premiers nombres, c'est-à-dire à

20 922 789 888 000

positions initiales. Dans le cas où on laisse toujours la même case à découvert, le nombre des positions initiales est seize fois plus petit.

LES IMPOSSIBILITÉS DE POSITION.

Dans chacune des positions initiale et finale, on suppose un cube portant le numéro *zéro* dans la case vide; on trace dans la position finale un chemin quelconque passant par toutes les cases,

et une seule fois par chacune d'elles, en admettant même que ce chemin procède par bonds quelconques ; on trace le même chemin dans la position initiale ; on considère les deux permutations formées par la succession des numéros des cubes dans ces deux chemins ; de plus, on suppose que les cases du taquin sont alternativement noires et blanches, comme celles de l'échiquier. Cela fait, on a la proposition suivante :

THÉORÈME V. — *Si les cases vides sont de même couleur, il est impossible de passer d'une position initiale à une position finale de classe différente; si les cases vides sont de couleurs différentes, il est impossible de passer d'une position initiale à une position finale de même classe.*

En effet, la règle du jeu revient à échanger le cube fictif zéro à chaque coup, avec un autre occupant une case de *couleur différente;* donc, dans le premier cas, on ne pourra passer d'une position à l'autre que par un nombre pair d'échanges, c'est-à-dire sans changer la classe de la permutation ; dans le second cas, on ne pourra passer d'une position à l'autre que par un nombre impair d'échanges, c'est-à-dire en changeant la classe de la permutation. Ce théorème s'applique à un jeu plus général, dans lequel on échangerait le cube fictif *zéro* avec un cube placé sur une case de couleur différente.

On peut évidemment supprimer le nombre **0** dans les deux suites, s'il donne lieu dans l'une et l'autre à des écarts de même parité. Dans la pratique, on tracera le chemin de manière que, dans la position finale, il donne la suite naturelle des nombres; on joue ensuite quelques coups sur la position initiale, de manière à amener la case vide à la place correspondante de la position

finale; alors on peut se dispenser de tenir compte du *zéro* dans les permutations. En effet, il est facile de voir que si, dans deux permutations, des termes plus grands ou plus petits que les autres occupent les mêmes rangs, on peut les supprimer sans changer la parité de la différence des nombres de leurs inversions.

Par la considération de l'échiquier, on peut étendre la règle du jeu, en admettant que l'on puisse enlever un numéro d'une case de couleur opposée à la case vide, pour le placer ensuite sur celle-ci. La théorie reste la même.

LA PRATIQUE DU TAQUIN.

Reprenons la permutation des quinze nombres

8, 6, 12, 1, 5, 14, 2, 11, 13, 15, 4, 9, 3, 10, 7,

et admettons que l'on ait le droit de faire avancer un pion quelconque de deux rangs vers la gauche ou vers la droite; il est facile de voir que l'on peut ranger tous les numéros dans l'ordre, si la permutation est de première classe. En effet, faisons avancer le numéro 1 de deux rangs vers la gauche, il arrive au second rang; puis, en déplaçant 8 de deux rangs vers la droite, on obtient

1, 6, 8, 12, 5, 14, 2, 11, 13, 15, 4, 9, 3, 10, 7.

Le numéro 1 est à sa place; faisons avancer à son tour le numéro 2 de deux en deux rangs, il arrive au troisième, et en déplaçant 6 de deux rangs vers la droite, on obtient

1, 2, 8, 6, 12, 5, 14. 11. 13. 15, 4, 9, 3, 10, 7.

En déplaçant le numéro 3 de deux en deux rangs vers la gauche, puis le numéro 4, on obtient

$$1, 2, 3, 4, 8, 6, 12, 5, 14, 11, 13, 15, 9, 10, 7.$$

Et ainsi de suite; de cette façon on peut toujours placer dans l'ordre les treize premiers pions; les deux derniers se trouveront dans l'ordre 14, 15, si la permutation est de première classe, et dans l'ordre 15, 14, si la permutation est de seconde classe. Ainsi, par cette manœuvre, on peut ranger une permutation quelconque dans l'ordre

$$1, 2, 3, \ldots, 13, 14, 15;$$

ou dans l'ordre

$$1, 2, 3, \ldots, 13, 15, 14$$

Cela posé, considérons le taquin de forme suivante (*fig.* 48) :

Fig. 48.

A	B	C	D	E	F	G	H
P	O	N	M	L	K	J	I

Le taquin élémentaire.

dans laquelle la ligne pleine est une barrière infranchissable; en profitant de la case vide, on peut sans changer l'ordre des termes dans le circuit AHIP, amener un numéro quelconque en B, puis la case vide en O; cela fait, si l'on glisse le cube de B en O, le terme B est avancé de deux rangs vers la gauche du circuit; par le mouvement inverse on l'avance de deux rangs

vers la droite (¹). Par conséquent, il résulte des considérations exposées au commencement de ce paragraphe, que l'on peut toujours amener dans un ordre donné une permutation de même classe; et dans l'ordre donné, à l'*exception* des deux derniers numéros, une permutation de classe différente.

Il est d'ailleurs parfaitement évident que le même procédé de raisonnement s'applique au taquin ordinaire, en restreignant la règle du jeu par l'emploi de barrières figurées par des lignes pleines; les cases forment alors un circuit fermé (*fig.* 49).

Fig. 49.

A	B	C	D
P	O	N	E
K	L	M	F
J	I	H	G

Le taquin gêné.

En résumé, par la considération des cycles, on détermine d'abord la classe de la position initiale donnée; pour plus de commodité, on mettra immédiatement la case vide en G. Cela fait, on rangera facilement les cubes des deux premières lignes ou des deux premières colonnes dans l'une des quatre positions directes ou des quatre positions inverses suivant que la position donnée est de première ou de seconde classe; il reste ensuite à

(¹) Cette démonstration, très simple, m'a été indiquée par M. Laisant.

placer les sept autres cubes dans un taquin élémentaire de huit cases, par la manœuvre indiquée pour le taquin de la *fig.* 48.

On peut encore résoudre le problème du taquin de la manière suivante. On détermine d'abord, par la méthode expéditive des cycles, la classe de la position donnée; si cette position est de première classe, on la ramène, comme il a été dit, à la position fondamentale; si cette position est de seconde classe, on échange deux éléments quelconques; elle devient de première classe, et peut encore être ramenée, après cet échange, à la position fondamentale.

On peut remplacer cet échange par l'enlèvement d'un cube situé sur une case de même couleur que la case vide, en le plaçant sur cette case.

ORDRE MAGIQUE.

Il existe encore d'autres ordres réguliers pour disposer les cubes du taquin; ainsi on peut les ranger suivant un ordre tel, qu'après avoir replacé le cube enlevé, la somme des numéros soit la même dans toutes les lignes, dans toutes les colonnes et dans les deux diagonales; on obtient alors ce que l'on appelle l'*ordre magique*. Cette théorie appartient à une autre récréation, le *jeu des carrés magiques,* sur laquelle nous reviendrons ultérieurement. Cependant, nous donnerons ici la manière d'obtenir le carré magique pour le taquin de 16 cases.

Pour cela, reprenons la position fondamentale de la *fig.* 38; ne touchons pas aux huit nombres des deux diagonales; échangeons

les autres cubes placés symétriquement par rapport au centre du carré, c'est-à-dire

2 et 15, 3 et 14, 5 et 12, 8 et 9.

Par ces quatre substitutions, nous ne changeons pas la classe de la permutation, et nous obtenons le carré magique (*fig.* 50) :

Fig. 50.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Ordre magique direct.

Fig. 51.

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

Ordre magique inverse.

dans lequel la somme des cubes de chaque ligne, de chaque colonne, ou de chaque diagonale est égale à 34. On peut donc ramener une position quelconque de première classe à cet ordre magique; si la position initiale est de seconde classe, on pourra toujours la ramener à l'ordre magique inverse obtenu en renversant l'ordre des cubes de toutes les lignes (*fig.* 51), ou de toutes les colonnes de l'ordre magique direct.

LE TAQUIN CONTINENTAL.

On peut généraliser d'une infinité de manières la forme du taquin. Nous appellerons *taquin continental* un assemblage quelconque de carrés juxtaposés suivant un côté commun; pour faire comprendre la variété de forme que cet assemblage peut présenter, nous dirons qu'il est assujetti seulement à former un *continent*, dans l'intérieur duquel on peut rencontrer des *mers intérieures* (*fig.* 53).

On place sur les carrés des cubes distingués par une lettre ou par un numéro spécial, et on enlève l'un deux de manière à former une case vide; cela fait, il s'agit de faire glisser les cubes sur la case vide contiguë, et de passer ainsi d'une position initiale donnée à une position finale également donnée.

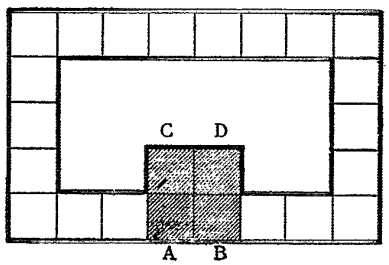
Il est évident qu'un tel jeu peut présenter deux sortes d'impossibilités : les premières proviennent de l'incompatibilité des positions initiale et finale, comme dans le taquin ordinaire; les autres proviennent de la forme du taquin.

THÉORIE DU GARAGE.

Considérons d'abord comme taquin continental le taquin formé par un carré de quatre cases ABCD, et un circuit de forme quelconque aboutissant par ses deux extrémités à deux cases contiguës A et B du carré. On peut fermer ce circuit, soit par AB,

soit par ACDB; de là deux circuits distincts qui se confondent sur la plus grande partie de leur parcours. On peut considérer ce taquin comme un taquin élémentaire, et, par suite, il est toujours possible d'échanger deux positions de même classe; nous dirons que les quatre cases A, B, C et D constituent un *garage*

Fig. 52.



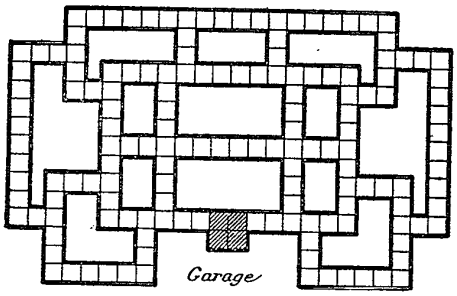
Taquin simple à garage.

Considérons maintenant un taquin plus complexe, formé d'un garage, d'un circuit quelconque et d'un réseau formé d'*embranchements* qui s'insèrent les uns sur les autres, ou sur la ligne principale, en des points différents, et de telle sorte qu'il n'y ait aucune *tête de ligne* (*fig.* 53).

Supposons que, dans la position initiale, la case vide soit dans la même portion de ligne que le garage, c'est-à dire de telle sorte qu'il n'y ait aucune bifurcation entre le garage et la case vide; si cette condition n'était pas remplie, on jouerait quelques coups afin de l'obtenir. Supposons qu'il en soit de même pour la position finale; si cette condition n'est pas remplie, on jouera quelques coups pour arriver à une *position intermédiaire;* on pourra toujours

remettre la case vide à sa place dans la position finale, en renversant l'ordre du mouvement qui a permis de passer de la position finale à la position intermédiaire.

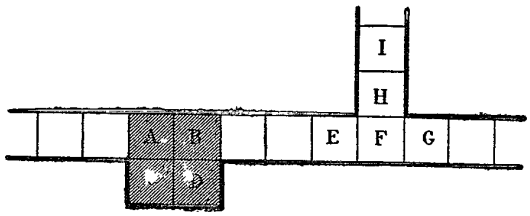
Fig. 53.



Taquin à embranchements et garage.

Cela posé, il est facile de voir que, dans un embranchement quelconque, on peut déplacer un cube quelconque de deux rangs; en effet, on forme un circuit fermé passant par le garage et le cube

Fig. 54.



considéré : on rentre ainsi dans le cas que nous venons d'indiquer ; cela fait, on ramène tous les autres cubes, à l'exception des trois cubes considérés, au moyen du mouvement de circulation (*fig.* 54)

Cependant, s'il s'agissait de faire sauter G au-dessus de FH, la méthode ne s'appliquerait pas, parce que les cubes GFH ne peuvent se trouver dans un même circuit avec le garage; alors on fait passer G par-dessus F et E; de cette façon E se trouve à la bifurcation; puis on fait sauter G par-dessus E et H; on obtient encore le résultat désiré.

Par conséquent, dans un taquin à embranchements quelconques, sans tête de ligne, on peut toujours, par le moyen du garage, faire franchir à un cube quelconque deux cubes consécutifs, sans déranger l'ordre de tous les autres cubes. Par ce procédé, on peut remplir un embranchement quelconque dans l'ordre de la position intermédiaire; on immobilise les cubes de cet embranchement, de telle sorte que l'on a diminué d'une unité le nombre des embranchements du taquin.

En simplifiant successivement le réseau, on en déduit ce théorème :

THÉORÈME XIV. — *Dans un taquin formé d'un nombre quelconque d'embranchements et d'un garage sans aucune tête de ligne, on peut passer d'une position quelconque à une autre position de même classe.*

LES IMPOSSIBILITÉS DE FORME.

Pour déterminer les impossibilités de la forme du taquin continental dans l'application de la théorie du garage, on trace d'abord un circuit le long des côtes du continent, et d'autres circuits, s'il y a lieu, le long du rivage des mers intérieures; puis on fait choix

d'un garage sur la côte ou dans l'intérieur, et l'on trace des embranchements suivant les lignes ou suivant les colonnes du taquin; d'après cela, il est évident que le problème de ramener une position quelconque à une position de même classe ne peut rencontrer d'impossibilité que dans les deux cas suivants :

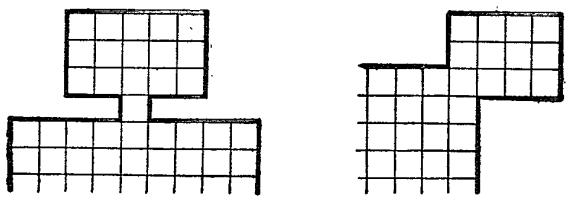
1° Si le taquin renferme des presqu'îles ou des péninsules que nous figurons plus loin;

2° Si le continent est partout trop étroit pour permettre l'établissement d'un garage.

LE TAQUIN A PÉNINSULE.

Lorsque les côtes de l'Océan ou des mers intérieures présentent l'un des accidents indiqués dans la *fig.* 55, on dit que le taquin

Fig. 55.



Isthme orthogonal. Isthme diagonal.

Taquins à péninsule.

renferme une péninsule; alors le taquin se divise en deux autres séparés par une seule case, qui forme ce que l'on peut appeler *isthme orthogonal* ou *isthme diagonal.*

Alors, dans le cas général, il y a impossibilité de forme; en effet, il est facile de voir qu'il est impossible de faire entrer dans l'isthme aucun autre cube que celui qui lui est contigu, de telle sorte que l'on ne peut effectuer le passage d'un cube dans l'isthme. Cependant, pour ce taquin à péninsule, le problème du taquin peut être possible lorsque la solution n'exige pas le passage de l'isthme. Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que, pour le continent et pour la péninsule considérés séparément, les positions initiale et finale appartiennent à la même classe, et, de plus, que l'on puisse établir un garage de part et d'autre.

Enfin, si la péninsule a plus d'un isthme, on rentre dans le cas général du continent avec mer intérieure sans péninsule.

LE TAQUIN COMPLET.

On peut considérer le jeu du taquin d'une autre manière; on suppose le taquin complètement couvert, et le joueur a la faculté d'enlever à son choix un cube quelconque, puis de jouer suivant la marche ordinaire et de replacer, à la fin de la partie, le cube enlevé sur la case vide. Il s'agit de choisir le cube à enlever de telle sorte que l'on puisse arriver à une position finale convenue.

Pour résoudre ce nouveau problème, on trace dans la position finale convenue un chemin, de manière à obtenir la suite naturelle des nombres; on trace le même chemin dans la position initiale, et l'on détermine le nombre des inversions de la permutation correspondante. Si la permutation est de première classe, il faut

enlever un cube d'écart pair, et, si la permutation est de seconde classe, il faut enlever un cube d'écart impair.

Il y a ainsi lieu de se demander si le problème est toujours possible; en d'autres termes, existe-t-il des positions initiales pour lesquelles tous les cubes aient des écarts de même parité? Nous allons faire voir qu'il peut y avoir toujours possibilité ou toujours impossibilité pour tout cube choisi dans la permutation initiale. En effet, la position finale, disposée suivant l'ordre naturel, ne contient que des écarts nuls; donc, si l'on exécute un nombre quelconque N d'échanges entre des cubes de même parité, tous les écarts resteront pairs, et il n'y aura aucun écart impair; par conséquent, si N est impair, la permutation considérée après les N échanges est de seconde classe; par suite, quel que soit le cube enlevé, la permutation reste de seconde classe et ne peut être ramenée à la position finale; il y a donc *impossibilité* pour un cube quelconque.

Dans le cas contraire, si N est pair, la permutation considérée après les N échanges est de première classe, comme la position finale; il y a donc *possibilité* pour un cube quelconque.

Lorsque le nombre total des cubes est pair, il existe une seconde série de positions initiales pour lesquelles il y a encore possibilité ou impossibilité complète. En effet, reprenons la permutation naturelle des n premiers nombres, échangeons chaque cube de numéro impair, avec le cube de numéro pair qui le suit; tous les écarts deviendront impairs; faisons ensuite un nombre quelconque d'échanges entre les cubes de même parité, nous obtiendrons alternativement des permutations de première et de seconde classe; les premières donnent l'impossibilité complète, et les dernières donnent la possibilité complète.

Lorsque le nombre total des cubes est impair, il existe toujours nécessairement un cube d'écart pair; alors les positions de la deuxième série comportent une seule exception, pour ce cube.

Remarque. — Les ingénieuses théories du *Taquin continental* et du *Taquin complet* sont dues, pour la plus grande partie, à M. Hermary.

NOTES.

NOTE I.

Sur le jeu des traversées.

Nous avons donné (p. 15), l'énoncé d'un problème général sur les traversées. Voici la solution très simple qui nous a été adressée par M. Delannoy, ancien élève de l'École Polytechnique.

Il y a deux cas à examiner, suivant que le bateau peut contenir quatre personnes, ou moins de quatre. Dans le premier cas, on fait passer deux ménages à la fois, et l'un d'eux revient chercher un autre couple. En répétant cette manœuvre, les n couples passeront la rivière en n voyages.

Dans le cas où le bateau ne peut contenir deux couples, le nombre x des personnes que le bateau peut au plus contenir est 2 ou 3. Alors, on est obligé de commencer par faire passer un certain nombre de femmes, ou bien un seul couple, afin de satisfaire à la condition de ne pas laisser une femme sans son mari en présence d'autres hommes. On démontre, comme à la page 10, que l'on ne peut faire passer 6 ménages avec un bateau contenant moins de quatre personnes. Il reste donc à donner le tableau de la *traversée des cinq ménages* avec un bateau contenant trois personnes.

On a au départ :

Première rive.	*Deuxième rive.*
E D C B A	. . . . .
e d c b a	. . . . .

I. — Trois femmes passent d'abord :

E D C B A	. . . . .
e d . . .	. . *c b a*

II. — Une femme (ou deux) revient et emmène la quatrième :

E D C B A	. . . . .
e	. *d c b a*

III. — Une femme revient, et trois maris rejoignent leurs femmes :

E D . . .	. . C B A
e d . . .	. . *c b a*

IV. — Un couple revient, et trois maris passent :

. . . . .	E D C B A
e d c . .	. . . *b a*

V et VI. — Une femme revient chercher successivement les trois dernières femmes :

. . . . .	E D C B A
. . . . .	*e d c b a*

En résumé, en désignant par n le nombre des ménages, par x le nombre des personnes que le bateau peut au plus contenir, et par N le nombre des voyages, on a le tableau suivant :

$n = 2$	$x = 2$	$N = 3$
$n = 3$	$x = 2$	$N = 6$
$n = 4$	$x = 3$	$N = 5$
$n = 5$	$x = 3$	$N = 6$
$n > 5$	$x = 4$	$N = n$.

NOTE II.

Sur le jeu des ponts et des îles.

Nous avons vu (p. 35) que le jeu des ponts se ramène à la description par un ou plusieurs traits continus, sans répétition, de toutes les figures formées de lignes droites ou courbes, dans le plan ou dans l'espace. Cette étude se résume dans les deux théorèmes suivants :

Théorème I. — *Dans tout réseau géométrique formé de lignes droites ou courbes, le nombre des points impairs est toujours zéro ou un nombre pair.*

Ce théorème se trouve complètement démontré dans le mémoire d'Euler

(p. 31); on peut encore donner à la démonstration la forme suivante : Désignons par A, B, C, D, ..., les diverses stations du réseau, les divers points d'embranchement, les têtes de ligne; soient P et Q deux stations voisines, c'est-à-dire telles que l'on puisse aller de P en Q par un ou plusieurs chemins, sans rencontrer d'autres stations du réseau. Si l'on supprime l'un de ces chemins PQ, le nombre des chemins qui aboutissent en P et en Q diminue d'une unité et change de parité. Par conséquent, si P et Q sont des points impairs, ils deviennent pairs par cette suppression; si P et Q sont pairs, ils deviennent impairs; enfin si P et Q sont de parité différente, ils demeurent de parité différente. Donc la parité du nombre des points impairs ne change pas par cette suppression. Par suite, en supprimant successivement tous les chemins qui unissent deux stations voisines, jusqu'à ce qu'il n'en reste aucun, le nombre des points impairs est nul; ce nombre était donc zéro ou un nombre pair, avant la suppression.

C. Q. F. D.

Remarque. — Ce théorème s'applique aux canevas géodésiques. Dans une chaîne de triangles, il y a toujours un nombre pair de sommets où aboutissent, en nombre impair, des angles réduits à l'horizon, tandis que le nombre des sommets où aboutissent des triangles en nombre pair peut être pair ou impair.

Théorème II. — *Tout réseau géométrique qui contient $2n$ points impairs peut être décrit par un nombre minimum de n traits sans répétition. Tout réseau géométrique, qui ne contient que des points pairs, peut être décrit par un seul trait sans répétition.*

On suppose que le réseau est continu, c'est-à-dire que l'on peut aller d'un point quelconque du réseau à un autre par un chemin continu. D'ailleurs, dans le cas de plusieurs réseaux séparés, il suffit d'appliquer à chacun d'eux les théorèmes précédents. Cela posé, si l'on part d'un point impair A et si l'on chemine au hasard, sans repasser sur la même voie, on sera forcé de s'arrêter à un certain moment; en observant que dans cette marche on ne change point la parité des stations que l'on traverse, on en conclura que le point d'arrêt est un point impair B. En supprimant le parcours AB, on obtient ainsi une figure qui ne possède plus que $(2n - 2)$ points impairs.

Après n parcours analogues, il ne restera donc qu'un réseau dont les stations sont d'ordre pair.

Maintenant, si l'on part d'un point quelconque M du réseau restreint, et si l'on chemine au hasard, on ne se trouvera arrêté qu'en revenant au point de départ M, après avoir décrit une courbe fermée. Après avoir décrit un certain nombre de boucles semblables, on aura parcouru tout le réseau. Mais, puisque le réseau est continu, ces boucles peuvent venir se souder

soit les unes sur les autres, puis sur les n chemins qui ont été décrits primitivement. Par suite, le réseau peut être décrit en n traits continus au plus.

C. Q. F. D.

Remarque. — Une figure dont tous les points sont pairs peut être considérée, de plusieurs façons, comme une seule courbe fermée. Cette observation trouve son emploi dans la théorie des courbes unicursales.

NOTE III.

Sur le jeu des labyrinthes.

Le problème des labyrinthes est un cas particulier du problème des ponts et des îles; en effet, puisque l'on doit parcourir deux fois chaque chemin, cela revient à la description d'un réseau qui ne contient que des points d'ordre pair. Mais, dans ce cas particulier, on peut décrire le réseau sans en connaître la forme, tandis qu'il n'en est plus de même dans le cas général.

La théorie des ramifications se ramène encore au problème d'Euler. D'ailleurs il résulte immédiatement du second théorème de la note précédente, que le nombre N, *base* de la ramification, est égal à la moitié du nombre des points impairs, c'est-à-dire du nombre l des extrémités libres augmenté du nombre des nœuds d'ordre impair. Désignons par i le nombre des nœuds d'ordre impair, par j le nombre des nœuds d'ordre pair, on a, en se reportant aux formules de la page 53,

$$N = \frac{l+i}{2} \quad \text{et} \quad p = i + j.$$

En combinant les diverses expressions du nombre N, on obtiendra quelques autres formules.

Remarque. — Dans le premier volume de la *Théorie des Nombres*, nous avons consacré un chapitre spécial à la *Géométrie de situation*. Ce chapitre renferme de nombreux et nouveaux développements sur le jeu des ponts et des îles et sur le jeu des labyrinthes au paragraphe intitulé : *Les Réseaux*.

On y trouve d'autres développements sur l'emploi des échiquiers arithmétiques, sur les polygones et sur les polyèdres, sur les régions et sur des théorèmes de Guthrie et d'Hamilton, de MM. Tait et G. Tarry.

NOTE IV.

Le problème des neuf reines et des dix reines.

Depuis l'apparition de notre premier volume, un géomètre distingué, M. le docteur P. H. Schoute, professeur à l'Université de Groningue, a publié, dans *Eigen Haard*, journal illustré de la Hollande, une suite d'articles ayant pour titre : *Wiskundige Verpoozingen*. On y trouve plusieurs développements des problèmes que nous avons traités. M. Schoute a donné le tableau des solutions simples du problème des neuf reines sur l'échiquier de 81 cases; mais ce tableau contient deux erreurs rectifiées par M. Delannoy, qui est fort habile dans ce genre de recherches. Le problème des neuf reines a 46 solutions simples, dont 4 semi-régulières, ce qui fait un total de 352 positions.

Si l'on supprime l'unité des quatorze premières solutions, et si l'on diminue d'une unité tous les autres chiffres, on obtient une solution du problème des huit reines. Inversement, toute solution du problème des neuf reines, dans laquelle l'une des diagonales ne contient pas de reine, donne naissance à deux solutions du problème des dix reines, en ajoutant une reine à l'un des coins extérieurs de cette diagonale. La solution 358297146, qui n'a pas de reine sur l'une ou l'autre des diagonales, donne quatre solutions simples du problème des dix reines; on en trouve ainsi 32. M. Delannoy a dressé le tableau des solutions du problème des dix reines; il y a 92 solutions simples dont 3 semi-régulières; donc, en tout, 724 positions. Dans ce tableau, la dixième ligne est désignée par 0.

1° *Tableau des solutions simples du problème des neuf reines.*

1 3 6 8 2 4 9 7 5	2 4 8 3 9 6 1 5 7	2 7 9 6 3 1 4 8 5
1 3 7 2 3 5 9 4 6	2 4 9 7 3 1 6 8 5	2 8 1 4 7 9 6 3 5
1 3 8 6 9 2 5 7 4	2 4 9 7 5 3 1 6 8*	2 8 5 3 9 6 4 1 7
1 4 6 3 9 2 8 5 7	2 5 7 9 3 6 4 1 8	2 8 6 9 3 1 4 7 5
1 4 6 8 2 5 3 9 7	2 5 7 9 4 8 1 3 6	3 5 8 2 9 6 1 7 4
1 4 7 3 8 2 5 9 6	2 5 8 1 3 6 9 7 4	3 5 8 2 9 7 1 4 6
1 4 7 9 2 5 8 6 3	2 5 8 1 9 6 3 7 4	3 5 9 2 4 7 1 8 6
1 4 8 3 9 7 5 2 6	2 5 8 6 9 3 1 4 7	3 6 2 9 5 1 8 4 7*
1 5 7 9 3 8 2 4 6	2 5 8 6 9 3 1 7 4	3 6 8 1 5 9 2 4 7*
1 5 7 9 4 2 8 6 3	2 5 9 4 1 8 6 3 7	3 6 8 5 1 9 7 2 4
1 5 9 6 4 2 8 3 7	2 6 1 3 7 9 4 8 5	3 6 9 7 4 1 8 2 5
1 6 8 3 7 4 2 9 5	2 6 1 7 5 3 9 4 8*	3 7 2 8 5 9 1 6 4
1 7 4 8 3 5 9 2 6	2 6 1 9 5 8 4 7 3	3 8 6 1 9 2 5 7 4
1 7 4 8 3 9 6 2 5	2 6 3 1 8 4 9 7 5	4 2 7 9 1 8 5 3 6
2 4 1 7 9 6 3 5 8	2 6 9 3 5 8 4 1 7	
2 4 7 1 3 9 6 8 5	2 7 5 1 9 4 6 8 3	

2° *Tableau des solutions simples du problème des dix reines.*

1368059247	1683792504	2630859417	3591607248
1369704258	1680493572	2683195047	3592074186
1369704285	1693842057	2683740195	3594108627
1397042586	1693074258	2691853074	3620195847
1469308257	1695084273	2697013584	3640195827
1470295386	1603794258	2603794158	3681470295
1470392586	1796308524	2793804615	3680195247
1470692538	1849730625	2706195384	3680415297
1470825369	1869304752	2839750164	3691470258*
1470835926	2468013579*	2859160374	3691470825
1470852936	2483960175	2803964175	3691057248
1495803627	2480596137	2804159637	3728610594
1497203685	2497501683	2918530746	3827105964
1497036258	2407963185	2938046157	3862051497
1407935286	2571069384	2930741586	3869105724
1570429368	2581703649	2950146837	3801625794
1580372469	2584703169	2961307485	3960271485
1580742963	2586307149	2963041857	4259108637
1506924738	2580369147	2968013574	4280136975
1647039258	2591047386	2973085146	4695013827
1647082539	2594086317	2970415863	4835019627
1649730258	2637019584	3528074196	4852017936
1640793528	2637085149	3570461928	4859102637*

Depuis quelques années, de nouveaux et nombreux résultats ont été obtenus sur le problème des tours (p. 66), sur le problème des fous (p. 69), et sur celui des reines. Cependant, on n'a pu trouver jusqu'à présent des formules générales pour les problèmes des fous et des reines, tandis que l'on peut obtenir complètement la solution de diverses questions sur le problème des tours, en s'imposant certaines conditions. Dans notre Mémoire *Sur l'Arithmétique figurative* (Congrès de Rouen, 1883), nous avons donné d'une manière générale les nombres des solutions du problème des tours ou des *permutations figurées* dans les cas suivants :

1° *Solutions symétriques par rapport au centre de l'échiquier;*
2° » » » *à une diagonale;*
3° » » » *aux deux diagonales;*
4° *Solutions qui coïncident avec elles-mêmes en faisant tourner l'échiquier d'un quart de tour;*

5° *Solutions n'ayant aucune tour sur une diagonale;*

6° *Solutions symétriques par rapport à une diagonale et n'ayant aucune tour sur cette diagonale;*

7° *Solutions symétriques par rapport au centre et n'ayant aucune tour sur l'une des diagonales;*

8°, 9° *Solutions symétriques par rapport aux deux diagonales et ne contenant aucune tour sur une ou sur deux diagonales.*

En particulier, le cinquième cas, traité par Euler, donne la solution du fameux et difficile *problème des rencontres*, qui revient à déterminer le nombre des permutations de n éléments dans lesquelles chacun des éléments ne peut occuper la place qu'il occupe dans l'ordre naturel. On doit surtout remarquer dans notre travail la très élégante méthode indiquée par M. Neuberg, professeur à l'Université de Liège. Celle-ci s'applique à un grand nombre d'autres problèmes et, en particulier, à l'étude des arrangements *discordants* d'un arrangement donné, c'est-à-dire des arrangements tels que chacun des éléments occupe une place différente de celle qu'il occupe dans un arrangement désigné à l'avance. Il y a lieu de chercher encore le nombre des arrangements discordants de deux arrangements donnés et, en particulier, le nombre des permutations figurées n'ayant aucune tour sur une diagonale, ni sur une ligne parallèle obtenue en élevant toutes les cases de cette diagonale d'un même nombre de rangées. Plus particulièrement, le problème de déterminer toutes les solutions du problème des tours, n'ayant aucune tour sur une diagonale et sur la parallèle contiguë, revient au *Problème des n ménages* que l'on énonce ainsi : *Des femmes en nombre n sont assises dans un ordre déterminé autour d'une table ronde; de combien de manières leurs maris peuvent-ils se placer, de telle sorte que chaque homme soit placé entre deux femmes, mais sans se trouver immédiatement à la droite ou à la gauche de la sienne?* — On observera que si l'on n'impose qu'une seule condition, à savoir que le mari ne peut se trouver à la droite (ou à la gauche) de sa femme, afin d'éviter le mariage de la main droite ou de la main gauche, le problème des ménages revient à celui des rencontres. Il fallait donc résoudre le problème des rencontres avant celui des ménages.

Nous avons encore démontré que, sur l'échiquier de n^2 cases, on peut placer un nombre maximum de fous égal à $2n-2$, de 2^n manières différentes, en supposant que deux fous quelconques ne soient pas en prise. Dans ce cas, les fous doivent toujours être placés sur les bords de l'échiquier.

Enfin, nous avons fait voir que, dans le problème des tours, le nombre des tours placées sur les cases de même couleur que celle des cases de la diagonale principale est toujours un nombre pair.

Dans le même volume du Compte rendu de l'Association française, au

Congrès de Rouen, nous devons encore signaler les intéressants Mémoires de MM. Mantel et Parmentier. Dans son travail sur *les Combinaisons d'éléments dispersés dans un plan*, M. Mantel, professeur à Delft, a déterminé le nombre X_2 des manières distinctes de placer *deux* reines, non en prise, sur un échiquier de n^2 cases, et a donné la formule

$$X_2 = \frac{1}{6} n(n-1)(n-2)(3n-1)$$

Il a montré que le nombre des manières de placer p reines non en prise, sur l'échiquier de n^2 cases, en supposant $p < n$, peut être représenté par un polynôme en n de degré $2p$.

Dans son Mémoire sur le *problème des n reines*, M. le général Parmentier a donné le tableau complet des solutions pour $n = 7, 8, 9$. En outre, il a donné les nombres des solutions du problème des reines énoncé à la page 81, pour 9 reines. En plaçant les nombres des solutions dans les cases qui correspondent à la position initiale d'une première reine, on forme ainsi pour les échiquiers de 8^2 et 9^2 cases, les figures suivantes :

Fig. 22 *bis*.

			8
		4	12
	16	14	8
4	8	16	18

Fig. 22 *ter*.

				40
			36	20
		28	38	38
	32	44	48	44
28	30	47	44	54

Au lieu de se donner une seule position initiale, on peut prendre les positions initiales de deux reines. En particulier, il existe des groupes de positions de deux reines pour lesquels le problème des huit reines est impossible. En complétant la notation de l'échiquier, d'après la *fig.* 22 (p. 81), et en ne considérant que les positions de deux reines non en prise, on trouve que

le problème des huit reines est impossible lorsque l'on se donne comme cases initiales

11 *avec* 23, 24, 28, 36, 37, 45, 47, 56, 68, 78;
12 *avec* 55, 57, 63, 66, 74, 75, 86, 87;
13 *avec* 36, 52, 76;
14 *avec* 53;
23 *avec* 36, 66;
24 *avec* 47, 63, 66, 75;
34 *avec* 46, 75,

ou des positions symétriques par rapport à une diagonale; d'autre part, avec la case 11, on peut choisir de 35 manières différentes une autre case, de telle

Fig. 22 *quater*.

4	.	1	2	5	6	.	3
.	3	5	6	1	2	4	.
5	1	.	4	3	.	6	2
6	2	3	.	.	4	5	1
3	5	6	.	.	1	2	4
2	4	.	1	6	.	3	5
.	6	2	3	4	5	1	.
1	.	4	5	2	3	.	6

sorte que le problème des huit reines soit possible, en ajoutant six reines aux deux premières.

On peut encore se proposer cet autre problème de superposer, sans con-

usion, plusieurs solutions du problème des reines. Ainsi, pour l'échiquier de 8^2 cases, on peut superposer jusqu'à six positions du problème des huit reines; en particulier, nous avons trouvé la solution suivante, dans laquelle les mêmes chiffres correspondent à une même solution du problème des reines. On résout ainsi la question suivante : Étant donnés 6 groupes de 8 jetons et de couleurs différentes, placer les 48 jetons sur les cases d'un échiquier ordinaire, de telle sorte que deux jétons de même couleur ne puissent se trouver sur une même ligne horizontale, verticale ou diagonale.

On peut encore superposer, mais d'une façon moins symétrique, les six solutions qui correspondent aux numéros de la page 79, à savoir :

$$8,\ 15,\ 43,\ 50,\ 78,\ 85,$$

ou encore

$$2,\ 13,\ 31,\ 62,\ 80,\ 91.$$

Dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (tome XI), M. Perott a ajouté une contribution importante au problème des tours et à celui des fous. En particulier, il a trouvé que sur les 32 cases blanches (ou noires) de l'échiquier ordinaire, on peut placer r fous, non en prise, pour $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, de f_r manières différentes. Les nombres r et f_r sont donnés dans le tableau (p. 229).

r :	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7;
f_r :	32,	356,	1704,	3532,	2816,	632,	16;

d'ailleurs $f_r = 0$ pour $r > 7$. En outre, si n désigne l'un des quatorze premiers entiers, le nombre F_n de manières de placer n fous, non en prise, sur l'échiquier ordinaire de 64 cases, est donné par la formule

$$F_n = f_n + f_1 f_{n-1} + f_2 f_{n-2} + \ldots + f_{n-1} f_1 + f_n.$$

Ainsi pour $n = 8$, *on peut placer huit fous, non en prise, sur l'échiquier ordinaire, de* 22 522 960 *manières différentes.*

M. le docteur Pein, professeur à la *Realschule* de Bochum, a repris d'une manière complète l'historique et l'exposé des diverses méthodes du problème des reines [1].

Dans cet ouvrage de 62 pages in-4°, on trouve sept planches gravées donnant les figures de toutes les positions du problème des n reines pour $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$. L'auteur nous apprend que c'est à Gauss que l'on doit la méthode que nous avions attribuée à M. Laquière. Dans une lettre à Schumacher, datée de 1850, Gauss a encore indiqué le moyen de faciliter

[1] AUGUST PEIN. — *Aufstellung von n Königinnen auf einen Schachbrette von n^2 Feldern, von $n = 4$ bis $n = 10$.* — Leipzig, Teubner; 1889.

le triage des positions des reines par l'emploi de cartons mobiles découpés en étoiles et servant à masquer les cases commandées par la position d'une reine.

Au mois d'octobre 1889, M. Claude Botton nous adressait de Montvazon, près Valognes, les résultats de ses recherches sur le nombre des solutions du problème des *onze* reines et des observations intéressantes sur la filiation ou la généalogie des solutions quand on passe d'un échiquier de n^2 cases à l'échiquier de $(n+1)^2$ cases. En même temps, M. Henri Tarry, ancien élève de l'École Polytechnique, inspecteur des finances à Alger, nous envoyait le tableau des solutions simples du problème des onze reines. Les résultats trouvés par nos deux collaborateurs sont identiques. Il existe 341 solutions simples du problème des onze reines, parmi lesquelles 12 sont semi-régulières, ce qui fait un total de 2680 solutions.

M. Tarry a présenté au congrès de Limoges (1890) les tableaux de ses calculs; en outre, il a dressé le tableau des solutions qui commencent par 1 dans le problème des *douze* reines; il en a trouvé 248 qui correspondent à 124 solutions simples. De plus, il a donné des formules qui permettent de calculer le nombre de positions que peuvent occuper les deux, trois, quatre, cinq *premières reines*, sur l'échiquier de n^2 cases. Ainsi, sur l'échiquier de deux cases de largeur et de n cases de hauteur, en supposant $n \geqq 4$, le nombre des positions de deux reines non en prise est égal à

$$(n-1)(n-2);$$

sur l'échiquier de trois cases de largeur et de n cases de hauteur, en supposant $n \geqq 6$, le nombre des positions de trois reines non en prise est égal à

$$(n-3)(n^2-6n+12);$$

sur l'échiquier de quatre cases de largeur et de n cases de hauteur, en supposant $n \geqq 8$, le nombre des positions de quatre reines non en prise est égal à

$$n^4-18n^3+139n^2-534n+840.$$

Pour compléter ces renseignements, nous ajouterons que nous avons publié sur le sujet qui nous occupe, au point de vue de l'exécution pratique, sans voir l'échiquier, deux articles dans les numéros 697 et 701 du journal *la Nature* de M. Gaston Tissandier. Mais, malgré tant d'efforts, la solution générale du problème des n reines est loin d'être connue; cependant, dans une Note qui termine l'opuscule de M. le général Frolow [1], naus avons

[1] Frolow. *Les carrés magiques, nouvelle étude*, avec des Notes par MM. Delannoy et Ed. Lucas. Paris, Gauthier-Villars; 1886.

démontré que le nombre des solutions ordonnées du problème des n reines, par progression arithmétique (*voir* p. 83-86), est égal à la fonction numérique

$$\frac{n^2}{abc\ldots}(a-3)(b-3)(c-3)\ldots,$$

dans laquelle a, b, c, ..., désignent les différents facteurs premiers qui divisent n.

NOTE V.

Sur le Solitaire à 41 cases.

Nous avons donné aux pages 117, 118, 131 et 132 quelques développements sur le solitaire à quarante et une cases. Mais, depuis, on est parvenu à la solution complète des possibilités et des impossibilités des réussites, en prenant une case initiale quelconque (*fig.* 31, p. 117). Au mois d'avril 1883, M. Mantel, professeur à Delft, nous a adressé la réussite suivante, en prenant **13** pour case initiale et **42** pour case finale.

$$\frac{15}{13}, \frac{34}{14}, \frac{04}{24}, \frac{54}{34}, \frac{\mathbf{24^*}}{\mathbf{26}}, \frac{\mathbf{35^*}}{\mathbf{37}}, \frac{\mathbf{46^*}}{\mathbf{48}}, \frac{74}{54}, \frac{66}{64}, \frac{45}{65}, \frac{75}{55}, \frac{63}{65}, \frac{43}{63}, \frac{62}{64}, \frac{54}{74},$$

$$\frac{84}{64}, \frac{\mathbf{55^*}}{\mathbf{75}}, \frac{65}{63}, \frac{73}{53}, \frac{23}{43}, \frac{43}{63}, \frac{51}{53}, \frac{31}{33}, \frac{63}{43}, \frac{43}{23}, \frac{13}{33}, \frac{41}{43}, \frac{34}{32}, \frac{22}{42}, \frac{43}{41}, \frac{40}{42}.$$

Au mois de février 1887, M. Chicandard, pharmacien à Paris, nous a adressé deux autres réussites, en prenant **37** pour case initiale et **37** ou **64** pour case finale; elles contiennent sept coups triples et débutent ainsi :

$$\frac{37}{57}, \frac{45}{47}, \frac{26}{46}, \frac{34}{36}, \frac{15}{35}, \frac{\mathbf{04^*}}{\mathbf{24}}, \frac{\mathbf{13^*}}{\mathbf{33}}, \frac{36}{34}, \frac{31}{33}, \frac{52}{32}, \frac{22}{42},$$

$$\frac{34}{32}, \frac{32}{52}, \frac{62}{42}, \frac{54}{52}, \frac{73}{53}, \frac{\mathbf{40^*}}{\mathbf{42}}, \frac{\mathbf{51^*}}{\mathbf{53}}, \frac{43}{45}, \frac{\mathbf{46^*}}{\mathbf{48}}, \frac{\mathbf{64^*}}{\mathbf{84}}, \frac{\mathbf{55^*}}{\mathbf{75}}.$$

Elles se terminent par l'une ou l'autre des opérations

$$\frac{66}{46}, \frac{45}{47}, \frac{57}{37}, \quad \text{ou} \quad \frac{57}{55}, \frac{45}{65}, \frac{66}{64}.$$

Les huit derniers coups de la réussite de M. Hermary, que nous avons décrite à la page 118, peuvent être remplacés par les six derniers de la réussite de M. Chicandard. En rapprochant ces divers résultats, on voit que l'on obtient particulièrement les solutions théoriques possibles en prenant pour case initiale ou finale **13**, **24** et toutes celles qui correspondent par rotation ou par symétrie. Il nous reste à démontrer que les autres solutions, théoriquement possibles, ne peuvent être réalisées sur le solitaire restreint. Supposons que les cases du solitaire soient garnies alternativement des couleurs blanche et noire, et que la case 44 soit noire. Dans chaque coup simple du solitaire, un pion quelconque ne peut prendre qu'un ou plusieurs pions, situés sur une ou plusieurs cases de couleur opposée à celle de la case qu'il occupe, pour venir se placer sur une case de même couleur que la sienne. Mais le solitaire de quarante et une cases renferme seize cases blanches, et seize cases noires sur le pourtour; si l'on prend une case blanche pour case initiale de la réussite, il reste quinze boules sur cases blanches et seize sur les cases noires du pourtour; d'autre part, les boules situées sur les cases du pourtour ne peuvent être prises avant d'avoir été déplacées, c'est-à-dire avant d'avoir pris un nombre de boules, au moins égal, situées sur des cases blanches. Par conséquent, quelle que soit la manœuvre, il restera au moins deux boules sur les cases noires du pourtour.

Ce criterium d'impossibilité peut s'appliquer à des solitaires de forme quelconque et peut s'énoncer ainsi : *Lorsqu'un solitaire contient des cases de même couleur garnies de boules qui ne peuvent être prises qu'après avoir été déplacées et que le nombre de ces cases n'est pas plus petit que celui des cases de couleur opposée, la réussite est impossible en prenant pour initiale une case de cette couleur opposée.*

Ainsi, pour le solitaire de 41 cases, la réussite est impossible lorsque l'on prend pour case initiale une case de couleur opposée à celle de **44**. De même, la réussite est encore impossible, lorsque l'on prend pour initiale l'une des cases **04**, **40**, **48**, **84**, attendu, qu'après le premier coup, on est ramené au cas précédent. Il en est de même lorsque l'on prend pour initiale l'une des cases **22**, **26**, **62**, **66**.

La démonstration précédente, due à M. Mantel, complète ainsi la solution du problème des réussites sur l'échiquier de quarante et une cases.

Il reste à élucider la question du solitaire de trente-neuf cases dont nous avons parlé dans la remarque de la page 139.

Nous donnerons une autre méthode pour obtenir les Réussites du solitaire à 41 cases; cette jolie solution nous a été adressée par M. Paul Redon, au mois de juin 1888. Les réussites possibles sont comprises dans le tableau suivant.

Tableau des vingt-huit réussites du Solitaire à 41 cases.

N°s	CI.	CF.	OBSERVATIONS.
1	13	15	Symétrique inclinée du n° 9. . . . .
2	»	42	Symétrique inclinée du n° 8. . . . .
3	15	13	Symétrique inclinée du n° 18 . . . . .
4	»	46	Symétrique inclinée du n° 19 . . . . .
5	24	31	*Réussite C.*
6	»	37	Symétrique horizontale du n° 5 . . . .
7	»	64	*Réussite D.*
8	31	24	Symétrique verticale du n° 19. . . . .
9	»	51	Symétrique verticale du n° 18. . . . .
10	37	24	Symétrique centrale du n° 19. . . . .
11	»	57	Symétrique centrale du n° 18. . . . .
12	42	13	Symétrique inclinée du n° 5. . . . .
13	»	46	Symétrique inclinée du n° 7. . . . .
14	»	73	Symétrique inclinée du n° 6. . . . .
15	46	15	Symétrique inclinée du n° 23. . . . .
16	»	42	Symétrique inclinée du n° 22. . . . .
17	»	75	Symétrique inclinée du n° 24. . . . .
18	51	31	*Réussite A.*
19	»	64	*Réussite B.*
20	57	37	Symétrique horizontale du n° 18. . . .
21	»	64	Symétrique horizontale du n° 19. . . .
22	64	24	Symétrique verticale du n° 7. . . . .
23	»	51	Symétrique verticale du n° 5. . . . .
24	»	57	Symétrique centrale du n° 5. . . . .
25	73	42	Symétrique inclinée du n° 10 . . . . .
26	»	75	Symétrique inclinée du n° 11 . . . . .
27	75	46	Symétrique inclinée du n° 21 . . . . .
28	»	73	Symétrique inclinée du n° 20 . . . . .

Il nous reste à exposer la succession des coups pour les Réussites A, B, C, D, portant les numéros 18, 19, 5, 7.

Réussite A. — De **51** à **31.** — On joue d'abord les treize coups suivants, dont deux triples :

$$\frac{31}{51}, \frac{43}{41}, \frac{22}{42}, \frac{34}{32}, \frac{13}{33}, \frac{\mathbf{04^*}}{\mathbf{24}}, \frac{\mathbf{15^*}}{\mathbf{35}}, \frac{32}{34}, \frac{37}{35}, \frac{56}{36}, \frac{26}{46}, \frac{34}{36}, \frac{36}{56}.$$

On ajoute ensuite les trois coups

$$\frac{48}{46}, \frac{45}{43}, \frac{\mathbf{40^*}}{\mathbf{42}}.$$

Enfin, on joue les treize coups suivants, symétriques des treize coups du début. On les obtient en écrivant les treize fractions dans l'ordre inverse, et en retranchant de 8 les premiers chiffres des deux termes de chaque fraction.

$$\frac{56}{36}, \frac{54}{56}, \frac{66}{46}, \frac{36}{56}, \frac{57}{55}, \frac{52}{54}, \frac{\mathbf{75^*}}{\mathbf{55}}, \frac{\mathbf{84^*}}{\mathbf{64}}, \frac{73}{53}, \frac{54}{52}, \frac{62}{42}, \frac{43}{41}, \frac{51}{31}.$$

Réussite B. — De **51** à **64.** — Remplacer les trois derniers coups de la réussite précédente par

$$\frac{51}{53}, \frac{43}{63}, \frac{62}{64}.$$

Réussite C. — De **24** à **31.** — Remplacer, dans la réussite A, les trois premiers coups par

$$\frac{22}{24}, \frac{43}{23}, \frac{31}{33}.$$

Réussite D. — De **24** à **64.** — Remplacer, dans la réussite B, les trois premiers coups par les trois premiers de la réussite C.

NOTE VI.

Sur les nombres parfaits.

Nous avons vu (p. 158) que les nombres parfaits proviennent des nombres premiers de la forme $N = 2^n - 1$.

Dans la Préface générale des *Cogitata physico-mathematica*, Mersenne affirme que les nombres premiers N correspondent aux valeurs

$$n = 1, 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257.$$

et qu'il n'en existe pas d'autres pour n plus petit que 257. Il résulte de ce curieux passage, remis en lumière par M. Genocchi, que Mersenne était en possession d'une méthode importante dans la théorie des nombres; mais cette méthode ne nous est point parvenue. En cherchant à vérifier l'assertion précédente, nous avons d'abord rencontré le théorème suivant :

Si $n = 4q + 3$ *est un nombre premier, en même temps que* $2n + 1$, *le nombre* $N = 2^n - 1$ *est divisible par* $2n + 1$. Par suite, en consultant la table des nombres premiers, on en conclut que, pour les valeurs de n successivement égales à

$$11, 23, 83, 131, 179, 191, 239, 251,$$

le nombre N n'est pas premier. Pour d'autres valeurs du nombre premier n, Fermat a trouvé que $2^{37} - 1$ est divisible par 223; Plana a trouvé que $2^{41} - 1$ est divisible par 13 367; M. Landry a trouvé que les nombres $2^{43} - 1$, $2^{47} - 1$, $2^{53} - 1$, $2^{59} - 1$, sont respectivement divisibles par 431, 2351, 6361 et 179951; enfin M. Le Lasseur a montré que, pour les exposants n

$$73, \quad 79, \quad 97, \quad 113, \quad 151, \quad 211, \quad 223, \quad 233,$$

les nombres $2^n - 1$ sont respectivement divisibles par

$$439, \quad 2687, \quad 11447, \quad 3391, \quad 18121, \quad 15193, \quad 18287, \quad 1399.$$

De plus, M. Seelhoff, de Brême, a démontré que $2^{61} - 1$ est premier, ce qui donne le *neuvième* nombre parfait.

Il reste donc à déterminer la nature des nombres N pour les *vingt-trois* exposants

$$67, 71, 89, 101, 103, 107, 109, 127, 137, 139, 149, 157,$$
$$163, 167, 173, 181, 193, 197, 199, 227, 229, 241, 257.$$

Pour vérifier la dernière assertion de Mersenne, sur le nombre supposé premier $2^{257} - 1$, et qui a 78 chiffres, il faudrait, en se servant des anciennes méthodes, que l'humanité, formée de mille millions d'individus, calculât simultanément et sans interruption, pendant un temps au moins égal à un nombre de siècles représenté par un nombre de vingt chiffres. Nous avons indiqué dans notre *Théorie des fonctions numériques simplement périodiques* (*Journal de Sylvester*, t. I, p. 304; Baltimore, 1878), une nouvelle méthode qui permettait à une seule personne de résoudre la question en moins de trois mois, avec l'*Arithmomètre de Thomas*.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

Finito libro, sit laus et gloria Christo!
Detur pro pœna scriptori pulcra puella.
Penna, precor, cessa, quoniam manus est mihi fessa,
Explicit hic totum, pro pœna da mihi potum.

Les joyeux vers qui précèdent sont placés à la fin de plusieurs manuscrits conservés à Dresde et à Padoue et qui ont pour titre : *Solatium ludi Scacchorum, scilicet regiminis ac morum hominum, et officium Virorum Nobilium, quorum formas si quis menti impresserii, bellum ipsum, et Ludi virtutem corde faciliter poterit obtinere.* C'est l'œuvre d'un moine picard, de l'ordre des Frères Prêcheurs, Jacobus de Cessolis, né à Césoles, au XIIIe siècle. La Bibliothèque Nationale de Paris possède plusieurs manuscrits de cet auteur, sur le jeu des échecs, sous le titre : *Moralitates super ludo Scacchorum,* nos 3234, 4319, 6287, 6492, 6493, 6705 à 6709, 6782, 6783 du fonds latin.

Nous donnons ci-après, suivant l'ordre chronologique, l'indication des principaux livres, mémoires, extraits de correspondance, qui ont été publiés sur l'Arithmétique de position et sur la Géométrie de situation. Nous avons surtout choisi les documents qui se rapportent aux sujets que nous avons traités ou que nous traiterons ultérieurement.

XVIe SIÈCLE.

CHUQUET. — *Jeux et Esbatemens qui par la science des nombres se font.* — F^os 206-210 d'un manuscrit de la Bibliothèque Nationale (1346 du F^ds Français) intitulé : *Triparty en la science des nombres.* On y trouve la notation des exposants et la règle des signes (1484).

LUCAS DE BURGO. — *Euclidis opera a Campano interprete fidissime translata Lucas Paciolus, theologus insignis, altissima mathematicarum disciplinarum scientia rarissimus, judicio castigatissimo detersit.* Venetiis, 1509.

DAMIANO. — *Livro da imparare giuocare a Scacchi,* etc. Romæ, 1512. — On attribue à cet auteur portugais le coup du *gambit,* qui consiste à sacrifier, au troisième coup de la partie d'échecs, le cavalier du roi.

ALBERT DÜRER donne dans la *Melencholia,* gravée en 1514, la figure d'un carré magique de seize cases.

S'ENSUIT JEUX, *partis des Escheȝ, composeȝ nouvellement pour récréer tous nobles cueurs et pour éviter oysiveté à ceulx qui ont voulonté, désir et affection de le sçavoir et apprendre, et est appelé ce Livre, le jeu des Princes et Damoiselles.* Paris, vers 1530. — On y trouve la course du cavalier sur la moitié (32 cases) de l'échiquier ordinaire.

AGRIPPA VON NETTESHEIM. — *De occulta philosophia libri tres.* Coloniæ, 1533.

DE BOUVELLES. — *Livre singulier et utile, touchant l'art et practique de Géométrie, nouvellement en françoys, par maître Charles de Bouvelles, chanoyne de Noyon.* Paris, 1542. — *Caroli Bovilli Samarobrini Geometricum opus duobus libris comprehensum.* Lutetiæ, 1557.

Propositiones arithmeticæ ad acuendos juvenes. — Cet ouvrage, imprimé sous le nom de BÈDE, en 1543, inséré dans les Œuvres d'ALCUIN, par l'abbé de Saint-Emeran, en 1777, doit être considéré, d'après Montucla (*Histoire des Mathématiques,* t. I, p. 496), comme le germe des Récréations mathématiques.

STIEFEL. — *Arithmetica integra.* Norimbergæ, 1544.

RIESE. — *Rechenung nach der lenge, auff der Linichen und Feder.* Leipzig, 1550.

CARDAN. — *De subtilitate libri XXI.* Norimbergæ, 1550. — Cet ouvrage a été traduit en français par Richard Leblanc, sous le titre : *Les Livres d'Hieronymus Cardanus, de la Subtilité et subtiles Inventions, ensemble les causes occultes et les raisons d'icelles.* Paris, 1556.

TARTAGLIA. — *Quesiti et inventioni diverse.* Venetia, 1554.

Rythomachiæ, sive Arithmomachia ludi mathematici ingeniosissimi descriptiones duæ. Erphordiæ, 1577.

GIANUTIO DELLA MANTIA. — *Libro nel quale si tratta della maniera di*

giuocar a scacchi, con alcuni sottilissimi partiti. Turin, 1597. — On y trouve une course du cavalier sur le demi-échiquier de 32 cases; en prenant la symétrique, et en réunissant les deux courses, on obtient un circuit donné par EULER, deux siècles plus tard.

MONANTEUIL. — *Ludus astromathematicus.* Paris, 1597.

DIEGO PALOMINO a publié un ouvrage sur les carrés magiques. Madrid, 1599.

XVIIe SIÈCLE.

BACHET DE MÉZIRIAC. — *Problesmes plaisans et délectables qui se font par les nombres.* Paris, 1612. Deuxième édition, en 1624. Troisième et quatrième, par Labosne, en 1874 et en 1879, à Paris.

D. H. P. E. M. (D. Henrion, professeur ès mathématiques). — *Deux cens questions ingénieuses et récréatives, extraictes et tirées des œuvres mathématiques de Valentin Menher, Allemand, avec quelques annotations de Michel Coignet sur aucune d'icelles questions.* Paris, 1620.

VAN ETTEN. — *Récréation mathématique.* Paris, 1626.

SCHWENTER. — *Deliciæ physico-mathematicæ.* Norimbergæ, 1626. — Cet ouvrage a été augmenté de deux volumes en 1651, par HARSDORFFER.

Récréations mathématiques composées de plusieurs problèmes d'Arithmétique, Géométrie, etc. Rouen, 1628.

REMMELIN. — *Adyta numeri reclusa.* Kempten, 1629.

MERSENNE. — *Questions inouyes, ou récréation des sçavants.* Paris, 1633.

WINANT VAN WESTEN. — *Récréations mathématiques contenant plusieurs problèmes,* etc. Nimègue, 1636.

BETTINUS. — *Apiaria universæ philosophiæ mathematicæ.* Bononiæ, 1645. — Un troisième volume en 1656.

CASPAR ENS. — *Thaumaturgus mathematicus.* Coloniæ, 1636 et 1651.

Forsetzung der mathematischen und philosophischen Erquickstunden. Nürnberg, 1651. — Le même, avec figures, 1653.

LEAKE. — *Mathematical recreations.* London, 1653.

La maison académique contenant un recueil général de tous les jeux divertissans pour se réjouyr agréablement dans les bonnes compagnies. Paris, 1654. — Dans son *Dictionnaire des ouvrages anonymes,* Barbier attribue ce livre au sieur de la Marinière.

BETTINUS. — *Recreationum mathematicarum apiaria novissima duo cim, accessit Coronidis loco appendix.* Bononiæ, 1658

Aureoli Philippi Theophrasti Paracelsi ab Hohenheim opera. Genevæ, 1658.

SCHOTT. — *Cursus mathematicus.* Herbipoli, 1661. — Ce volume contient, sous le titre : *Arithmetica divinatoria,* des problèmes plaisants et délectables.

FÜRSTENBACH. — *Mannhafter Kunstpiegel.* Augsburg, 1663.

SCHOTT. — *Technica curiosa, seu mirabilia artis.* Norimbergæ, 1664.

KIRCHER. — *Arithmologia sive de abditis Numerorum mysteriis.* Romæ, 1665.

OUGHTRED. — *Mathematical recreations lately compiled by H. Van Etten, invented and written by W. Oughtred.* London, 1667.

La maison des jeux académiques contenant un recueil général de tous les jeux divertissans pour se réjouir et passer le temps agréablement. Paris, 1668.

Récréations mathématiques, composées de plusieurs problèmes plaisans et facétieux, etc. Lyon, 1669 et 1680.

BLIERSTROP. — *Arithm. geom. quadrat. cubic und costische Erquickstunden.* Glückstadt, 1670.

LEYBOURN. — *Arithmetical Recreations.* London, 1676.

KNORR VON ROSENROTH. — *Kabbala denudata.* Sulzbaci, 1677.

FERMAT. — *Varia opera mathematica.* Tolosæ, 1679.

E. W. — *Ludus mathematicus.* London, 1682.

KOCHANSKI. — *Considerationes quædam circa Quadrata et Cubos magicos, nec non aliquot Problemata omnibus Arithmophilis ad investigandum proposita* (*Acta Eruditorum,* p. 391), 1686.

LA LOUBÈRE. — *Du Royaume de Siam.* Amsterdam, 1691. — On y trouve des renseignements sur les carrés magiques des Indiens.

DANXT. — *Arithm. geom. algebr. und historische Ergötzlichkeiten.* Copenhague, 1691.

FRÉNICLE DE BESSY. — *Des Quarrés ou Tables magiques. Table générale des quarrés magiques de quatre* (*Mém. de l'Acad. Roy. des Sc.,* depuis 1666 jusqu'à 1699, t. V, p. 209 et 303). Paris, 1729.

OZANAM. — *Récréations mathématiques.* Paris, 1694. — Cet ouvrage a eu beaucoup d'éditions avec additions successives.

Divertissemens innocens contenant les règles du jeu des échecs, du billard, etc. La Haye, 1696.

XVIIIe SIÈCLE.

POIGNARD. — *Traité des Quarrés sublimes.* Bruxelles, 1704.

R. P. SÉBASTIEN TRUCHET. — *Mémoire sur les combinaisons* (*Mém. de l'Acad. Roy. des Sc.* pour l'année 1704, p. 363). Paris, 1706.

DE LA HIRE. — *Nouvelles constructions et considérations sur les quarrés magiques, avec leurs démonstrations.* — *Construction des quarrés magiques dont la racine est un nombre pair* (*Mém. de l'Acad. Roy. des Sc.* pour l'année 1705, p. 167). Paris, 1706.

DE MONTMORT. — *Essai d'analyse sur les jeux de hasard.* Paris, 1708 et 1714.

SAUVEUR. — *Construction générale des quarrés magiques* (*Mém. de l'Acad. des Sc.* pour l'année 1710, p. 92). Paris.

LEIBNIZ. — *Annotatio de quibusdam ludis imprimis de ludo quodam Sinico, differentiaque scacchici et Latrunculorum* (*Misc. Soc. reg.*, t. I.) Berlin, 1710. Voir aussi *Leibnizii Epistol. a Kortholto editis*, t. II, p. 278, et *Fellerii monum. inedit.*, p. 642.

PESCHECK. — *Alte und neue arithmetische und geometrische Erquickstunden und Ergötzlichkeiten.* Budithin, 1716.

LEIRTIC. — *Ludus mathematicus, sive crux geometrica.* Jenæ, 1716.

HALKEN. — *Deliciæ mathematicæ.* Hamburg, 1719.

Otia mathematica. Salisbury, 1719.

MAIER. — *De arithmetica figurata ejusque usibus aliquot* (*Comm. Acad. Petropol.*, t. III). Saint-Pétersbourg, 1735.

STAMMA. — *Essai sur le jeu des échecs.* Paris. 1737.

ROHLFS. — *Künstliches Zahlenspiel oder gründliche Anweisung, wie die sogenannten magischen Quadrate zu verfertigen.* Buxtehude, 1742.

ROST. — *Mathematischen Lost und Nutzgarten.* Nürnberg, 1745.

RESSING. — *Arithmetischer und algebraischer Zeitbertreib.* Hamburg, 1747.

Les Amusements mathématiques. Paris et Lille, 1749.

D'ONS EN BRAY. — *Méthode facile pour faire tels quarrés magiques que l'on voudra* (*Mém. de l'Acad. Roy. des Sc. de Paris* pour l'année 1750).

ARNAUD. — *Nouveaux éléments de géométrie.* Paris, 1758.

EULER. — *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* (*Mém. de l'Acad. des Sc.*). Berlin, 1759.

EULER. — *Solution d'une question curieuse qui ne paraît soumise à aucune analyse* (*Hist. de l'Acad. des Sc. de Berlin*, t. XV, p. 310).

EULER. — *Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile* (*Nov. Comm. Acad. Petrop.*, t. XV, p. 75).

EULER. — *Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques* (*Mém. de la Soc. des Sc. de Flessingue*, t. IX, p. 85).

BONAVENTURE. — *Amusements philosophiques.* Amsterdam, 1763.

RALLIER DES OURMES. — *Mémoire sur les quarrés magiques* (*Mém. de l'Acad. Roy. des Sc. de Paris* pour l'année 1763).

BENJAMIN FRANKLIN. — *Experiments and observations on Electricity... to which are added Letters and Papers on philosophical subjects.* London, 1764.

Veritas quadrata mathematica, physica, philologica, theologica. Amstelodami, 1765.

LELIO DELLA VOLPE. — *Corsa del cavallo per tutt'i scacchi dello scacchiere.* Bononia, 1766.

CAPITO. — *Alle magischen Quadrattafeln zu verfertigen, d. i. die Zahlen aller geraden und ungeraden Quadraten gründlich auszurechnen, leicht zu ordnen, und viele Millionenmal eben so leicht zu verändern, dass sie in die Länge, Breite und uber's Creutz einerlei, und die verlangte Summe bringen.* Gluckstadt, 1767.

VANDERMONDE. — *Remarques sur les problèmes de situation* (*Mém. de l'Ac. des Sc. de Paris* pour l'année 1771, p. 566).

GUYOT. — *Nouvelles récréations physiques et mathématiques.* Paris, 1772.

MONGE. — *Réflexions sur un tour de cartes* (*Mém. des Sav. étr.*, t. VII, p. 390). Paris, 1773.

COLLINI. — *Solution du problème du cavalier au jeu d'échecs.* Mannheim, 1773; chez Tobie Leffler, au Chandelier d'Or.

HUTTON. — *Miscellanea mathematica.* London, 1775.

CHAULA. — *Récréations mathématiques.* Paris, 1778. — Cet ouvrage est attribué à Montucla.

LUYA. — *Amusements arithmétiques et algébriques de la campagne.* Genève, 1779.

BALLIÈRE DE LAISEMENT. — *Essai sur les problèmes de situation.* Rouen, 1782.

FONTANA. — *Opuscoli matematici sopra il teorema della composizione delle forze, e sopra il calcolo integrale delle differenze finite.* Pavia, 1789. — On trouve à la page 45 de cet ouvrage la solution du problème de la tour au jeu des échecs.

VON CLAUSSBERG. — *Demonstrative Rechenkunst.* Leipzig, 1795.

XIXe SIÈCLE.

GIACOMETTI. — *Il nuovo giuocho di Scacchi, ossia il giuocho della guerra.* Geneva, 1801.

LORENZ. — *Lehrbegriff der Syntaktik und Kombinationslehre.* Magdeburg, 1806.

BRUNACCI. — *Compendio di calcolo sublime.* Milan, 1811. — Dans le t. I, p. 74, l'auteur traite le problème de la tour au jeu des échecs.

MOLLWEIDE. — *De quadratis magicis commentatio.* Lipsiæ, 1816.

G. GICCOLINI. — *Il tentativo di un nuovo giuocho di Scacchi.* Roma, 1820. Cet ouvrage contient deux circuits du cavalier sur l'échiquier de 100 cases.

WARNSDORF. — *Des Rösselsprungs einfachste und allgemeinste Lösung,* 1823.

JACKSON. — *Rational amusements for winter evenings.* London, 1824.

PRATT. — *Studies of Chess.* London, 1825.

HINDENBURG. — *Ueber Gitter und Gitterschrift* (*Journal de Crelle,* t. II, p. 87). Berlin.

LEGENDRE. — *Théorie des nombres.* 3e édition. Paris. — On trouve, t. II, p. 187, quelques recherches sur le saut du cavalier.

MUSER. — *Récréations arithmétiques.* Munster, 1831.

T. CICCOLINI. — *Del cavallo degli Scacchi.* Paris, 1836.

HOHNDELL. — *Praktische Anleitung zur Bildung und Berechnung magischer oder sogenannter Zauberquadrate.* Leipzig, 1837.

VIOLLE. — *Traité complet des carrés magiques.* 2 vol. in-8 avec atlas contenant 400 figures. Paris et Dijon, 1838.

ZUCKERMANDEL. — *Regeln, nach denen alle Zauberquadrate, mit gleichen Liniensummen, leicht und schnell, auf eine spielende Art, gebildet werden können.* Nürnberg, 1838.

DE LAVERNÈDE. — *Problème de situation,* dans les Mémoires de l'Académie du Gard (1839).

DU HAYS. — *Sur le jeu de loto* (*Journal de Liouville,* t. VII, p. 192). Paris, 1842.

LIBRI. — *Sur l'emploi, dans l'analyse, des fonctions discontinues, pour la recherche des formules générales* (*Comptes rendus de l'Acad. des Sc.*). Paris, 1842.

TOMLINSON. — *Amusements in Chess.* Londres, 1845.

LISTING. — *Vorstudien zur Topologie* (*Abgedrückt aus den Göttinger Studien*). Göttingue, 1848.

REISS. — *Beiträge zur Theorie des Solitär-Spiels* (*Journal de Crelle,* t. LIV). Berlin.

CATTOIS. — *Calendrier mental grégorien, ou les Curiosités mathématiques, utiles, instructives et amusantes.* Orléans, 1852.

MINDING. — *Sur la course du cavalier* (*Journal de Crelle*, t. XLIV, 1852).

LAMARLE. — *Solution d'un coup singulier du jeu de dames* (*Mém. de l'Acad. des Sc.*, t. XXVII). Bruxelles, 1852.

SLYVONS. — *Application de l'Analyse aux sauts du cavalier du jeu des échecs*; Bruxelles, 1856.

HAMILTON. — *Memorandum respecting a new system of roots of unity* (*Philosophical Magazine*). London, 1856.

LANGE. — *Handbuch des Schachspiels.* Halle, 1856.

HÜGEL. — *Die magischen Quadrate mathematisch behandelt und bewiesen.* Ansbach, 1859.

LISTING. — *Der Census raümlichen Complexe* (*Göttinger Abhandlungen*, 1861).

C. DE POLIGNAC. — *Sur la course du cavalier au jeu des échecs* (*Comptes rendus de l'Acad. des Sc.*, t. LII, p. 840). Paris, 1861.

JAENISCH. — *Traité des applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs.* Saint-Pétersbourg, 1862.

CRETAINE. — *Études sur le problème de la marche du cavalier au jeu des échecs et solution du problème des huit dames.* Paris, 1865.

PLATEAU. — *Sur une récréation arithmétique* (*Bulletin de l'Acad. de Belgique*, t. XVI, p. 62. Bruxelles, 1863, et t. XXXVIII. Bruxelles, 1874).

ED. LUCAS. — *Application de l'Arithmétique à la construction de l'armure des satins réguliers.* Paris, 1867.

MOON. — *On the Knights move at Chess* (*Cambridge and Dublin math. Journ.*, 1re série, t. III, p. 333).

FROST. — *General solution and extension of the problem of the* 15 *schools girls* (*The Quarterly Journal*, t. VI, VII, VIII et IX). London, 1867-1870).

THOMPSON. — *On magic Squares* (*The Quarterly Journal of pure and applied mathematics*, t. X, p. 186. London, 1869; t. XI, p. 57, 123, 213).

HORNER. — *On the algebra of magic squares.* (*The Quarterly Journal*, t. XI, p. 57 et 123; t. XII, p. 213) London, 1870.

REISS. — *Évaluation du nombre de combinaisons desquelles les* 28 *dés d'un jeu de dominos sont susceptibles d'après la règle de ce jeu* (*Annali di matematica*, t. V, p. 63). Milano, 1871.

VOLPICELLI. — *Soluzione completa e generale mediante la geometria di situazione del problema relativo alle corse del cavallo sopra qualunque scacchiere.* Roma, 1872.,

L. GROS. — *Théorie du baguenodier*, par un clerc de notaire lyonnais. Lyon, 1872.

EXNER. — *Der Rosselsprung als Zauberquadrat.* Hirschberg, 1872.

DRACH. — *An easy general rule for filding up all magic squares* (*The Messenger of mathematics*, t. II). Cambridge, 1873.

VON PESSL. — *Ueber eine besondere Art magischer Quadrate.* Amberg, 1873.

BROCH. — *Sur la représentation graphique des nombres complexes* (Assoc. franç. pour l'Avanc. des Sc.; Congrès de Lille, 1874).

GÜNTHER. — *Zur mathematischen Theorie des Schachbretts* (*Archiv der Math. und Physik*, t. LVI). Leipzig, 1874.

GLAISHER. — *On the problem of the eight queens* (*Philosophical Magazine*). London, 1874.

GÜNTHER. — *Beweis eines fundamental Satzes von den magischen Quadraten* (*Archiv der Mathematik und Phys.*, t. LVII, p. 285). Leipzig, 1875.

FROST. — *Two simple methods of tracing the Knight's path* (*The Quart Journ.*). London, 1876 et 1877.

P. SIMONS. — *Le jeu des mages, nouveau jeu breveté.* Lierre, 1876 et 1878.

ED. LUCAS. — *Sur un problème d'Euler relatif aux carrés magiques* (*Nouv. Corr. Math.*, t. II, p. 97). Bruxelles, 1876.

GÜNTHER. — *Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften.* Leipzig, 1876. — Cet ouvrage très important contient deux monographies, l'une sur les Polygones et les Polyèdres étoilés, et l'autre sur les Carrés magiques.

MANSION. — *Sur les carrés magiques* (*Nouv. Corr. math.*, t. II, p. 161 et 193). Bruxelles, 1876.

FLYR-SAINTE-MARIE. — *Note sur un problème relatif à la marche du cavalier sur l'échiquier* (*Bulletin de la Soc. math.*, t. V, p. 144). Paris, 1876.

ED. LUCAS. — *Sur l'échiquier anallagmatique de M. Sylvester* (Assoc. franç. pour l'Avanc. des Sc.; Congrès du Havre, p. 213), 1877.

ED. LUCAS. — *Théorème sur la Géométrie des Quinconces* (*Bulletin de la Soc. math.*, t. VI, p. 9). Paris, 1877.

LAISANT. — *Note sur la Géométrie des Quinconces* (*Bulletin de la Soc, math.*, t. VI, p. 156). Paris, 1877.

C. DE POLIGNAC. — *Représentation graphique de la résolution en nombres entiers de l'équation indéterminée du premier degré* (*Bulletin de la Soc. math.*, t. VI, p. 158). Paris, 1877.

RUCHONNET. — *Théorie du solitaire*, par feu le docteur Reiss, librement traduit de l'allemand (*Nouv. Corr. math.*, t. III, p. 231). Bruxelles, 1877.

ED. LUCAS. — *Problèmes sur la Géométrie des Quinconces dans le plan et dans l'espace* (*Nouv. Corr. math.*, t. III, p. 412). Bruxelles, 1877.

BUSSCHOP. — *Recherches sur le jeu du solitaire.* Bruges, 1879.

HERMARY. — *Sur le jeu du solitaire* (Association française pour l'Avancement des sciences; Congrès de Montpellier, 1879).

FLEURY. — *La clé du taquin, ou la solution des quinze.* Marseille, 1880.

W. JOHNSON. — *Note on the* 15" *Puzzle* (Journal de Sylvester). Baltimore, 1879.

W. E. STORY. — *Notes on the* 15" *Puzzle* (Journal de Sylvester). Baltimore, 1879.

ED. LUCAS. — *Principii fondamentali della geometria dei Tessuti* (*L'ingegneria civile e le Arti industriali*, t. VI). Torino, 1880.

D. ANDRÉ. — *Sur un problème d'Analyse combinatoire* (*Bulletin de la Soc. math.*, t. V). Paris, 1877. — *Détermination du nombre des arrangements complets où les éléments consécutifs satisfont à des conditions données.* (*Id.*, t. VII). — Cet intéressant Mémoire contient des problèmes sur l'alphabet, sur la musique, sur les marches du pion au jeu de dames et sur les sauts du cavalier aux échecs.

DE MONDÉSIR. — *Le dernier mot du taquin* (*La Nature* du 25 septembre 1880).

C. DE POLIGNAC. — *Sur la théorie des ramifications* (*Bulletin de la Soc. math.*, t. VIII). Paris, 1880. — *Note sur la marche du cavalier* (*Id.*, t. IX).

E. LEMOINE. — *Quelques questions de Géométrie de position sur les figures qui peuvent se tracer d'un seul trait.* Congrès d'Alger, 1881.

LAISANT. — *Régions d'un plan et de l'espace* (Congrès d'Alger, 1881). — *Remarques sur la théorie des régions et des aspects* (*Bulletin de la Soc. math.*, t. X). Paris, 1882.

PERRIN. — *Sur le problème des aspects* (*Bulletin de la Soc. math.*, t. X). Paris, 1882.

PAUL DE HIJO. — *Le problème du cavalier des échecs, d'après les méthodes qui donnent la symétrie par rapport au centre.* Ouvrage contenant plus de 413000 parcours du cavalier. Metz, 1882.

PEROTT. — *Sur le problème des fous* (*Bulletin de la Soc. math.*, t. XI). Paris, 1883.

ED. LUCAS. — *Sur l'Arithmétique figurative et les permutations.* — *Calendrier perpétuel julien et grégorien.* Congrès de Rouen, 1883.

TAIT. — *Note on a Theorem in Geometry of Position.* Edimbourg, 1883.

ED. LUCAS. — *Le problème géographique des quatre couleurs* (*Revue scientifique*). Paris, 1883.

MANTEL. — *Sur les combinaisons d'éléments dispersés dans un plan.* Congrès de Rouen, 1883.

Gal PARMENTIER. — *Le problème des n reines.* Congrès de Rouen, 1883.

TAIT. — *Listing's Topologie* (*Philos. Magaz.*), 1884.

PALAMÈDE (Vte DU LIGONDÈS). — *Polygraphie du cavalier appliquée à la recherche des carrés magiques.* Orléans, 1884.

ED. LUCAS. — *Le calcul et les machines à calculer.* Conférence au Congrès de Blois, 1884.

SCHOUTE. — *Sur les carrés magiques à enceintes.* Congrès de Grenoble, 1885.

Gal FROLOW. — *Le problème d'Euler. — Les carrés magiques, nouvelle étude,* avec des notes par MM. Delannoy et Ed. Lucas. Paris, Gauthier-Villars, 1884-1886.

ED. LUCAS. — *Calendrier perpétuel à roulette. — Appareils à calculs exacts et instantanés.* Quatre boîtes de réglettes multiplicatrices, multisectrices, financières, népériennes. Paris, Belin; 1885.

FLEURY. — *Deux problèmes de Géométrie de situation* (*Journal de Math. élém.*) Paris, 1885.

DORMOY. — *Théorie mathématique des jeux de Bourse. — Théorie mathématique de l'écarté.* Congrès de Nancy, 1886.

G. TARRY. — *Géométrie de situation et le problème des dominos.* Congrès de Nancy, 1886.

V. COCCOZ. — *Carrés magiques impairs à enceintes successives.* Congrès de Nancy, 1886.

Gal FROLOW. — *Nouvelles recherches sur les carrés magiques.* Congrès de Nancy, 1886.

H. DELANNOY. — *Emploi de l'échiquier pour la solution des problèmes arithmétiques.* Congrès de Nancy, Paris et Limoges.

ED. LUCAS. — *Les carrés magiques de Fermat.* (*Journ. de Math. élém.*,) Paris, 1887.

ED. LUCAS. — *L'Arithmétique en boules. — L'Arithmétique en bâtons. — Le Jeu militaire. — Amusements par les jetons. — Le problème des reines.* (articles publiés dans les nos 696, 697, 701, 731, 734 du journal *La Nature*). Paris, 1888.

ED. LUCAS. — *Jeux scientifiques pour servir à l'histoire, à l'enseignement et à la pratique du calcul et du dessin.* Première série :

1° **La Fasioulette;**
2° **La Pipopipette;**
3° **La Tour d'Hanoï;**
4° **L'Icosagonal ou le Jeu des vingt forts;**
5° **L'Arithmétique diabolique ou le Calcul infernal;**
6° **Les Pavés florentins du père Sébastien.**

Six brochures in-8°, avec planches. Paris, 1889.

ED. LUCAS. — *Les appareils de calcul et les jeux de combinaisons* (*Revue scientifique*). Paris, 1890.

R. P. LE COINTE. — *Le Jeu des Réseaux.* Deux mémoires extraits du *Cosmos.* Paris, 1890.

H. Tarry. — *Le problème des reines.* Congrès de Limoges, 1890.

Ed. Lucas. — *Chinoiserie arithmétique. — Un carré magique de 54 siècles* (n° 874 du journal *La Nature*). Paris, 1890.

Ed. Lucas. — *Conférences sur le Diagrammomètre du colonel Kozloff, faites au Conservatoire national des Arts et Métiers.* Paris, 1890. — Voir aussi le n° 896 du journal *La Nature.*

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

PRÉFACE V
INTRODUCTION IX

PREMIÈRE RÉCRÉATION. — *Le jeu des traversées en bateau.*

Dédicace et épigraphe 1
Historique. — Biographie de Bachet 3
La traversée d'un régiment dans un batelet 5
La traversée du batelier 5
La traversée des trois ménages 6
L'erreur de Tartaglia 9
La traversée de quatre ménages 11
Problème général des traversées 12
Autre généralisation du problème 14
La station dans une île 15

DEUXIÈME RÉCRÉATION. — *Le jeu des ponts et des îles.*

Dédicace et épigraphes 19
Le mémoire d'Euler 21

Les ponts de Paris en 1880 33
Les figures d'un seul trait. — La signature de Mahomet 35
Les voyages d'un contrebandier 38

TROISIÈME RÉCRÉATION. — *Le jeu des labyrinthes.*

Dédicace et épigraphes 39
Le Petit Poucet. — Le fil d'Ariane 41
Les labyrinthes de l'Égypte et de la Grèce 41
Tournefort dans une caverne 43
Les autres labyrinthes 44
Définition géométrique du problème des labyrinthes 46
Solution de M. Trémaux 47
Sur la théorie des arbres géométriques 51

QUATRIÈME RÉCRÉATION. — *Le problème des huit reines au jeu des échecs*

Dédicace et épigraphes 57
Historique 59
Notations et conventions 61
Des solutions adjointes 62
Des solutions irrégulières et semi-régulières 64
Des solutions régulières 64
Des solutions renversées 65
Problème des tours 66
Les permutations rectilignes 67
L'anagramme de Pascal 68
Problème des fous 69
Méthode de M. Günther 70
Méthode de M. de la Noë 71
Procédés mnémotechniques 75
Moins de huit reines 77

Les 92 positions des huit reines 78
Méthode de Gauss 79
Autre énoncé du problème des huit reines 81
Desideratum 83
Théorèmes d'arithmétique 84

CINQUIÈME RÉCRÉATION. — *Le jeu du solitaire.*

Dédicace et épigraphes 87
Historique 89
Définition du solitaire 91
Règle du jeu du solitaire 94
Premiers exercices. — La croix de six boules. — La croix de neuf boules. — Le triangle. — La cheminée. — Le calvaire. — La pyramide. — La double croix. — Les cinq croix entrelacées. — Le pentagone. — Le carré incliné. — L'octogone. — La triple croix 95
Problèmes sur le solitaire décentré. — Le chapelet. — L'équateur. — La croix et sa couronne. — La pleine lune. — La croix de Malte. — Quatre cavaliers cernés par seize soldats. — Trois cavaliers cernés par seize soldats. — Adam et Ève dans le Paradis terrestre. — Le lecteur au milieu de son auditoire. — Le jugement dernier. — Le grand bol. — Les quatre évangélistes et les douze apôtres. — La Trinité et les douze apôtres. — Jésus et les douze apôtres. — Le calice. — La Trinité. — Les deux pôles. — Le corsaire 99
Les lettres en boules 104
La récréation de Paul 105
La récréation de Madeleine 106
Les réussites du solitaire à 37 cases 108
De la symétrie horizontale 109
De la symétrie verticale 110
De la symétrie centrale 110
De la symétrie inclinée 111
Procédé général de réciprocité 113
Procédé général d'échange 114

Coups triples du solitaire accéléré. — Marche accélérée du lecteur au milieu de son auditoire. — Marche accélérée des douze apôtres. — Le carré de vingt-cinq boules. — Le tricolet. — Réussite sur le solitaire de quarante et une cases..... 114
Extensions du solitaire et de la règle du jeu..... 118
Des positions et des cases congruentes..... 120
Effets successifs de la règle complète..... 121
Résidu congruent sur un carré de neuf cases..... 122
Position réduite..... 123
Les seize formes de positions réduites..... 126
Applications de la théorie..... 128
Impossibilités du solitaire de 37 cases..... 130
Étude du solitaire de 41 cases..... 131
Étude du solitaire de 33 cases..... 132
Les réussites du docteur Reiss..... 135
Des solitaires des divers ordres..... 139

SIXIÈME RÉCRÉATION. — *La Numération binaire.*

Dédicace et épigraphes..... 143
De la numération..... 145
Système binaire..... 146
Système duodécimal..... 147
Avantages du système binaire..... 148
Le Jekim..... 149
Les boîtes de poids..... 151
L'éventail mystérieux..... 154
La progression double..... 156
Les nombres parfaits..... 158

SEPTIÈME RÉCRÉATION. — *Le jeu du baguenaudier.*

Dédicace et épigraphes..... 161
Historique..... 164
Biographie de Cardan..... 165
Biographie de Wallis..... 167
Imagination d'un clerc de notaire..... 168
Discussion étymologique de M. Gros..... 170
Description du baguenaudier..... 173
Du déplacement d'un anneau..... 174
Du déplacement de deux anneaux..... 175
Problème général du baguenaudier..... 177
Marche ordinaire..... 178
Nombre des coups de navette..... 179
Sur les combinaisons..... 181
Durée de la manœuvre..... 182
Marche accélérée..... 183
Tableau des deux marches du baguenaudier..... 185

HUITIÈME RÉCRÉATION. — *Le jeu du taquin.*

Dédicace et épigraphe..... 187
Historique..... 189
Définition du taquin..... 191
Les permutations rectilignes..... 195
Les permutations circulaires..... 196
Les dérangements..... 197
Les deux classes de permutations..... 198
Les échanges..... 200
Les cycles..... 203
Les écarts..... 205
Nombre des positions initiales..... 206
Les impossibilités de position..... 206

La pratique du taquin..... 208
Ordre magique..... 211
Le taquin continental..... 213
Théorie du garage..... 213
Les impossibilités de forme..... 216
Le taquin à péninsule..... 217
Le taquin complet..... 218

Note I. — Sur le jeu des traversées..... 221
Note II. — Sur le jeu des ponts et des îles..... 222
Note III. — Sur le jeu des labyrinthes..... 224
Note IV. — Le problème des neuf reines et des dix reines..... 225
Note V. — Sur le solitaire à 41 cases..... 232
Note VI. — Sur les nombres parfaits..... 235

Index bibliographique..... 237

ACHEVÉ D'IMPRIMER
EN JANVIER 1992
PAR L'IMPRIMERIE
DE LA MANUTENTION
A MAYENNE
N° 96-91

CHEZ LE MÊME ÉDITEUR

BACHET Claude-Gaspar, sieur de Méziriac. PROBLÈMES PLAISANTS ET DÉLECTABLES QUI SE FONT PAR LES NOMBRES. Réimpression de la 5e édition (1959) revue, simplifiée et augmentée par A. LABOSNE, avec un avant-propos de J. ITARD et d'un portrait de l'auteur. 244 pages, 16 × 20, nouveau tirage 1992, broché.

ISBN 2-85367-175-5

BRUNSCHVICG Léon. LES ÉTAPES DE LA PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE. Réimpression de l'édition de 1912. Périodes de constitution : arithmétique, géométrie, analyse infinitésimale. Période moderne : la philosophie critique et le positivisme, l'évolution de l'arithmétique, le mouvement logistique, l'intelligence mathématique et la vérité. 592 pages, 14,5 × 23, nouveau tirage 1992, augmenté d'une préface de J.T. DESANTI, broché.

ISBN 2-85367-034-1.

DANTZIG Tobias. LE NOMBRE, LANGAGE DE LA SCIENCE. Traduit de l'anglais. Cet ouvrage, dont la première édition date de 1937, introuvable depuis longtemps, retrace d'une manière très vivante « l'histoire profondément humaine » de l'évolution des concepts mathématiques. 270 pages, 10 figures, nouveau tirage 1974 augmenté d'une préface de M. BERNELLE, 14 × 23, broché.

ISBN 2-85367-095-3

JOLY Louis. LES POLYÈDRES (réguliers, semi-réguliers et composés). Ce fascicule passe en revue les polyèdres réguliers et leurs généralisations naturelles conservant les mêmes éléments de symétrie : polyèdres étoilés, composés et semi-réguliers, réunis par des tableaux et des illustrations. 96 pages, 52 figures, 16 × 25, 1979, broché.

ISBN 2-85367-049-X

LAURENT H. THÉORIE DES JEUX DE HASARD. Réimpression. La théorie des jeux de hasard est une question qui dépend du calcul des probabilités et qui en est même une partie intégrante. C'est une difficulté qui s'est présentée à propos d'un coup de dés au chevalier Méré qui a donné naissance au calcul des probabilités, créé par PASCAL et FERMAT. La théorie des jeux emprunte des notions à toutes les branches de l'analyse et du calcul des probabilités. 176 pages, 14 × 23, nouveau tirage 1965, broché.

ISBN 2-85367-117-8

NOGUES Charles. THÉORÈME DE FERMAT. SON HISTOIRE. Réimpression enrichie d'un complément de J. ITARD. XVI-165 pages, 14 ×23, nouveau tirage 1992, broché.

ISBN 2-85367-178-X

Lucas, Edouard
Récréations mathématiques 1

ISBN 2-85367-121-6

3943