Le Jeu du Solitaire

Le Jeu du solitaire fascine depuis quelques siècles. Plusieurs théories et études ont été faites sur ce jeu, avec la plupart du temps la recherche d'une ou plusieurs solutions pour arriver au résultat tant espéré : terminer avec une seule bille sur le plateau.

Voici une méthode qui me semble intéressante pour aider le joueur à gagner. Le principe repose sur une observation du jeu, de sa logique, pour permettre à tous de facilement comprendre ce qui se passe sur le plateau, et si possible arriver à ne laisser qu'une dernière bille.

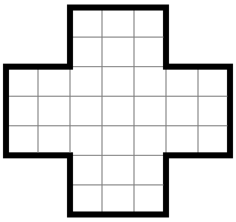
C'est donc une méthode, efficace et simple me semble-t-il. Ce n'est pas une garantie certaine de réussite. Mais pour ceux qui l'appliqueront, ils pourront s'attendre à un résultat final d'1, 2 ou 3 billes.

Cette méthode s'appuie essentiellement sur 2 règles expliquées et détaillées dans les 2 premiers chapitres : **la règle du damier** et **la règle de l'équivalence.** Ainsi dès les premières pages, le joueur trouvera les principales clés pour réussir ses parties. La suite de l'ouvrage est consacrée à l'approfondiffement de la logique du solitaire et à l'étude de quelques difficultées.

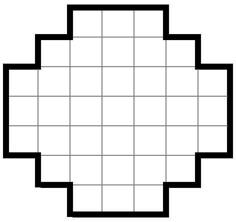
SOMMAIRE :

Préambule

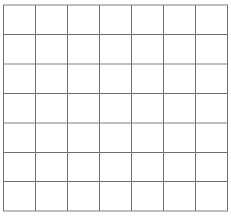
Dans les premiers chapitres, les explications s'appuieront sur les formes de plateau suivantes :



Solitaire dit « anglais »
comportant 33 trous.

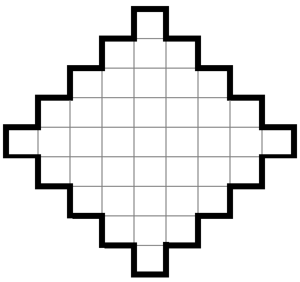


Solitaire dit « français »,
comportant 37 trous.



Plateau sans véritable frontière,
pour travailler sur tous les cas
de figure du jeu du solitaire.

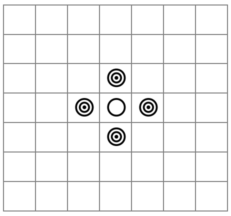
A partir du chapitre 6, c'est le « Grand Solitaire » qui servira de fil conducteur, même si plusieurs explications peuvent servir à la réalisation des autres formes du jeu.



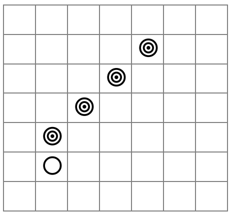
Grand solitaire,
comportant 41 trous.

Chapitre 1 : les noirs et les blancs.

1-/ Observons :

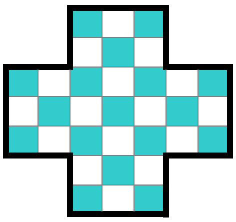


La bille située au milieu des autres peut « manger » au choix l'une des quatre situées autour d'elle. Celles-ci ne peuvent en revanche jamais se manger entre elles, puisque les billes se déplacent toujours de 2 cases en 2 cases.

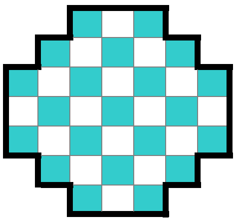


Dans cette situation, la bille située en bas à gauche peut, en quelques coups, manger les quatre billes situées sur la même diagonale. Même situation que la figure précédente : ces quatre billes ne pourront jamais se manger entre elles.

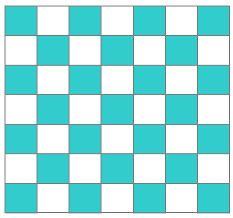
Finalement nous constatons que le plateau du jeu du solitaire n'est rien d'autre qu'un **damier** : les billes situées sur les cases blanches peuvent manger les billes situées sur les cases noires, et réciproquement. En revanche, les billes « **blanches** » ne se mangent jamais entre elles, ni les billes « noires ».



solitaire anglais



solitaire français



2-/ Les noires en surnombre :

Comptons maintenant les billes blanches et les billes noires :

<u>remarque</u> : quelle que soit la couleur de la bille retirée au début, par exemple la noire située au centre du plateau, la première bille qui sera mangée sera automatiquement de l'autre couleur. Pour l'instant et pour simplifier, nous compterons les cases.

Solitaire anglais :	17 billes noires 16 billes blanches
Solitaire français :	21 billes noires 16 billes blanches

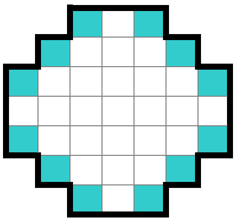
Les noires sont donc en plus grand nombre que les blanches, particulièrement dans le solitaire français où le déséquilibre est de **5 billes**.

Or que se passe-t-il dans le jeu : au final, pour gagner, il ne reste qu'une bille. Le coup précédent, il en reste donc deux, l'une à côté de l'autre. Il s'agit donc d'une blanche et d'une noire. Avant le dernier coup, l'égalité est parfaite : 1 noire - 1 blanche. Ce qui veut dire qu'au cours du jeu il doit y avoir un nombre supérieur de coups : « blanche mange noire » que « noire mange blanche »

Mais continuons à observer…

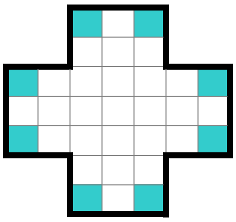
3- / La résistance des noires :

Observons d'abord le solitaire français, et notamment les billes situées en bord du plateau.



Sur les 21 billes noires au total, 12 sont situées sur les bords. Comment font-elles pour être mangées ? Il n'y a qu'une seule possibilité : elles doivent manger une blanche, avant de pouvoir à leur tour être mangées.

Cela veut donc dire que les noires sont en surnombre, et de plus il est difficile de les manger.



Dans le solitaire anglais, la situation est la même, bien que la résistance des billes noires soit moindre. 8 doivent « manger » avant « d'être mangées ».

Le déséquilibre blanches - noires est réel en début de partie. Or l'équilibre 1 - 1 doit être impérativement obtenu à l'avant-dernier coup d'une partie.

4- / La méthode :

La **méthode** à retenir pour espérer gagner la partie est d'appliquer la **règle du damier** :

Manger les billes noires en priorité.
Sauf lorsque cela s'avère indispensable, c'est à dire lorsqu'une bille blanche doit être « sacrifiée » pour qu'une noire soit ensuite mangée, il faut au maximum éviter de manger les billes blanches.

Conseil pour l'application de la règle du damier :

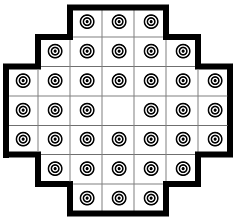
Il est particulièrement efficace d'appliquer cette règle jusqu'à environ une dizaine de coups avant la fin du jeu. A ce stade, si la méthode a été correctement appliquée, un équilibre (d'environ) 5 blanches - 5 noires doit être constaté.
Comme la majorité des joueurs le font, il est nécessaire en étant arrivé à ce stade de marquer une pause, et de réfléchir directement à la solution qui mènera au dernier coup et au gain de la partie.
Pour aider à faire cette dizaine de derniers coups, la règle de l'équivalence expliquée dans le chapitre suivant sera utile.

Avant d'expliquer cette règle de l'équivalence, il est cependant nécessaire de revenir encore sur la règle du damier, pour comprendre que certaines billes noires ... peuvent être grises.

5- / Des billes noires sont grises :

Le chapitre de l'équivalence expliquera le lien existant entre le départ du jeu et la place finale de la dernière bille. Sans anticiper sur la démonstration, ce qu'il faut retenir pour l'instant est la situation suivante :

Pour le solitaire français :

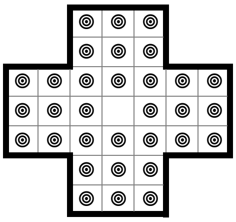


Un jeu correspondant à cette situation de départ, pour laquelle la bille centrale a été retirée, est **impossible** à réaliser. Le meilleur résultat final qui peut être obtenu est de deux billes restant sur le plateau.

Un démarrage de la partie sur certaines autres cases permet le gain de la partie (cf. chapitre 2).

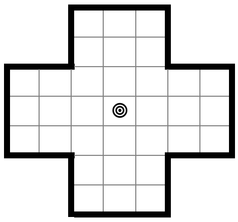
Pour le solitaire français, toutes les noires sont vraiment noires. Le déséquilibre de 5 billes est trop important pour considérer que certaines billes noires le sont moins que d'autres. Il faut donc forcément chercher à les manger.

Pour le solitaire anglais :

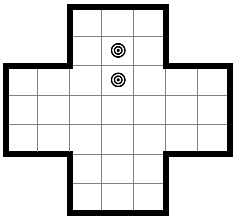


Nous ne traiterons dans ce sous-chapitre « *des billes noires sont grises* » que le cas du jeu pour lequel au départ, la bille centrale est retirée. (voir ci-contre)

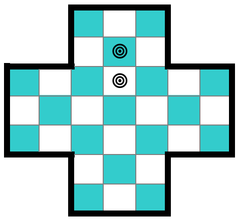
Il s'agit de la situation de départ la plus classique.



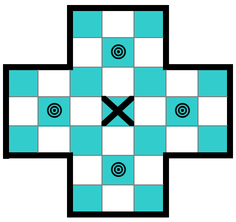
Le chapitre suivant (Règle de l'équivalence) montrera que la dernière bille d'un jeu gagnant se retrouvera aussi au centre. (voir ci-contre)



Donc la position avant le dernier coup sera obligatoirement celle exposée ci-contre (éventuellement il faut tourner le plateau d'un quart de tour si les billes ne sont pas en haut de la croix du solitaire mais sur une autre branche)



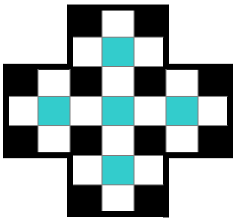
Appliquons notre damier et regardons la bille noire (c'est-à-dire celle située sur la case noire) : tout d'abord elle a une place particulière parce qu'elle n'a pu atterrir à cette place qu'en venant du milieu du plateau. Elle ne vient ni de sa droite, ni de sa gauche ni d'en haut.



En y regardant de plus près, le constat est le suivant : les billes ne se déplacent que de deux cases en deux cases. Donc la noire restant au dernier coup est obligatoirement l'une des quatre billes ci-contre (position du plateau de départ).

La position centrale, qui aurait théoriquement pu être une position de cette bille noire est barrée, puisqu'il s'agit de la bille qui a été enlevée au départ.

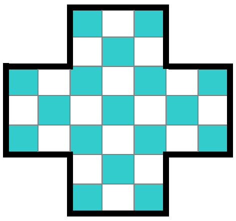
Or ces quatre billes noires, si l'on applique rigoureusement la règle du damier, sont à manger par les blanches. De plus, elles sont plus faciles à manger puisqu'elles ne sont pas situées sur un bord. Pour arriver à la fin du jeu, il faut donc être vigilant sur ces quatre billes, afin que les billes blanches n'aient pas un appétit trop féroce sur elles ! Elles sont noires, mais pas trop… Elles sont donc grises.



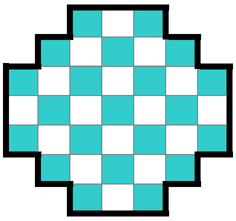
Le plateau du damier anglais ressemble finalement au damier suivant, pour le jeu dont la bille retirée au départ est celle du centre du plateau.

Rappel de la « règle du damier » :

Manger les billes noires en priorité



solitaire anglais



solitaire français

Chapitre 2 : l'équivalence.

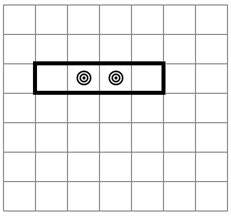
Oublions les billes blanches et noires maintenant.

La « règle de l'équivalence » a pour objectif essentiel de connaître et de comprendre la position finale du jeu du solitaire, à partir du départ qui aura été choisi par le joueur.

Remarque préalable :

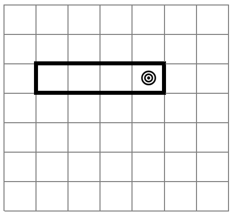
Dans cette règle, il ne s'agit pas d'enlever une ou plusieurs billes en même temps, voire d'en rajouter. Le sens du jeu devra être respecté par le joueur. Mais cette règle permet de mieux visualiser le jeu et surtout la position finale.

1-/ Observons :



De la position de gauche, nous pouvons obtenir la position de droite. C'est le principe de base du jeu du solitaire.

Si nous revenons en arrière, nous pouvons retrouver la position de gauche.

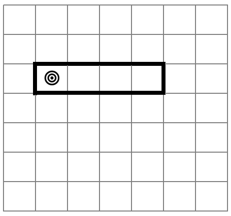


Nous pouvons dire que les deux positions sont ÉQUIVALENTES

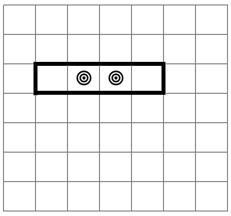
Dans la suite de ce chapitre,

le signe = (égal) sera utilisé pour dire : « ÉQUIVALENT »
le signe < > sera utilisé pour dire : « NON ÉQUIVALENT »

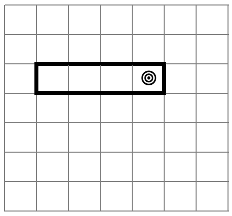
Trouvons une première équivalence :



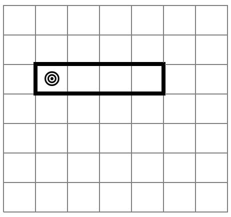
=



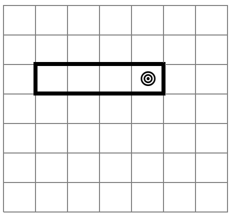
=



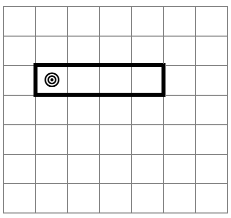
L'équivalence fonctionne aussi :



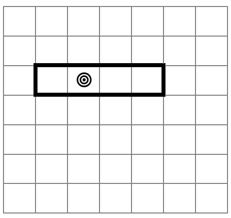
=



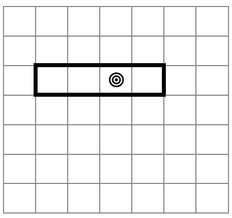
En revanche on constate aisément que :



< >

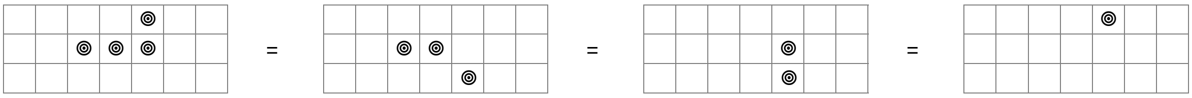


< >

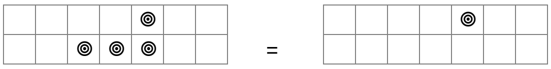


<u>2-/ Cherchons quelques équivalences simples :</u>

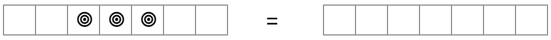
<u>L'équivalence 0 (zéro) :</u>



Donc :



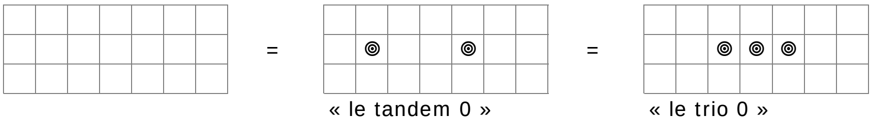
Et :



C'est l'équivalence : 0

L'équivalence 0 peut s'écrire aussi :

0 =



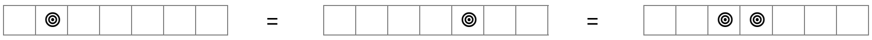
Particularité du tandem 0 ou du trio 0 : quelle que soit leur place sur le plateau, ils sont équivalents à 0.

On peut même superposer deux billes (représentées par le chiffre 2 sur le plateau) :

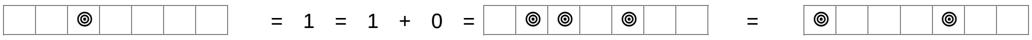
Ce qui amène à cette curieuse équivalence du solitaire : **2 = 0**

<u>L'équivalence 1 :</u>

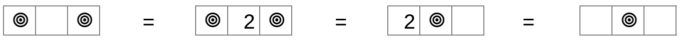
1 =



On peut se permettre quelques opérations :



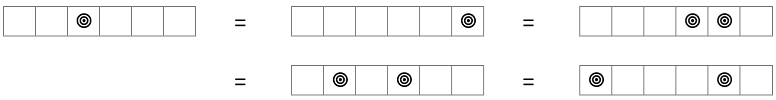
On a aussi :



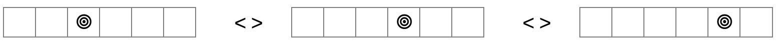
<u>Récapitulatif des équivalences :</u>

Équivalence 0 : 0 = 2 =

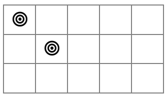
Équivalence 1 :

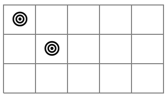


Mais :

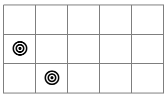
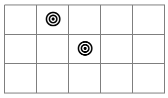


Toutes les positions sur un plateau peuvent être obtenues à partir des positions de l'équivalence 0
ou de l'équivalence 1, à l'exception de celles équivalentes à la position suivante (ou ses semblables) :

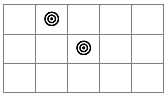
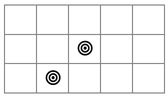
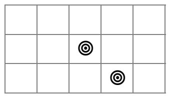
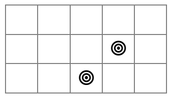
 < > 0

 < > 1

Cette situation est la position du doublon, sachant que
tous les doublons ne sont pas équivalents entre eux :

 = 

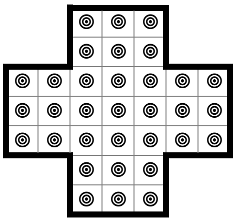
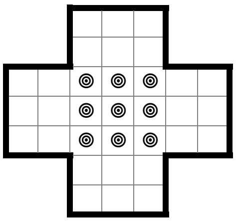
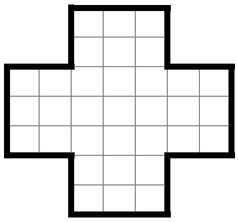
Mais par exemple :

 < >  < >  < > 

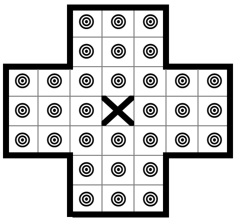
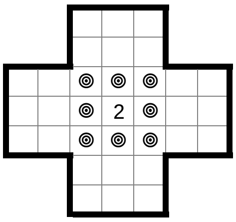
Le chapitre 4 recense, pour les joueurs qui le souhaitent,
l'ensemble des équivalences existantes.

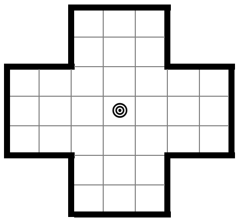
3- / L'équivalence dans le plateau du solitaire :

Solitaire anglais : *Suppression des billes par ensembles de billes formant des « trios 0 »*

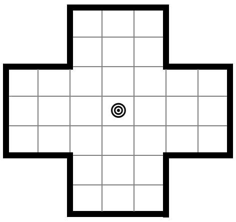
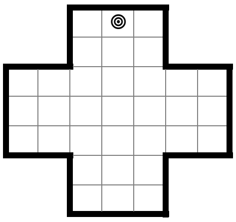
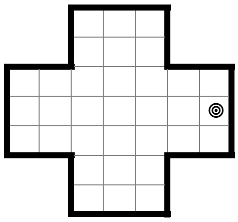

=

=

= 0

Pour une situation de départ ou la bille centrale est enlevée :


=


=

= 1

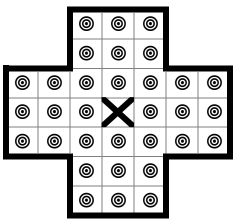
Ainsi que :


=

=

et les positions symétriques

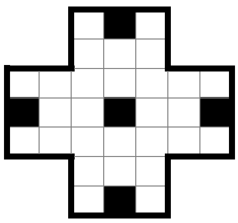
Cette règle de l'équivalent permet d'affirmer, dans le cas du <u>solitaire anglais :</u>

- quelle que soit la position de départ (lieu où l'on retire la première bille), le solitaire est faisable.
  En effet, lorsque l'on retire une bille, cela est équivalent au fait d'en rajouter une à cette même place pour en avoir deux superposées. Or comme le plateau complet est équivalent à 0, rajouter une bille revient à avoir un plateau équivalent à 1.

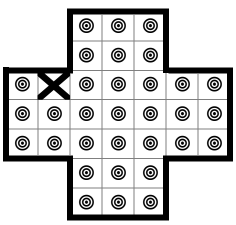
- quelle que soit la position de départ, la position finale que le joueur obtiendra sera obligatoirement la bille finale placée au point de départ du jeu, ou à une position équivalente.



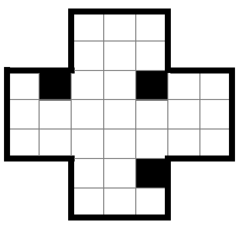
Ainsi, avec le plateau de départ de gauche, la solution finale sera obligatoirement une bille placée sur l'une des cases noircies du plateau de droite



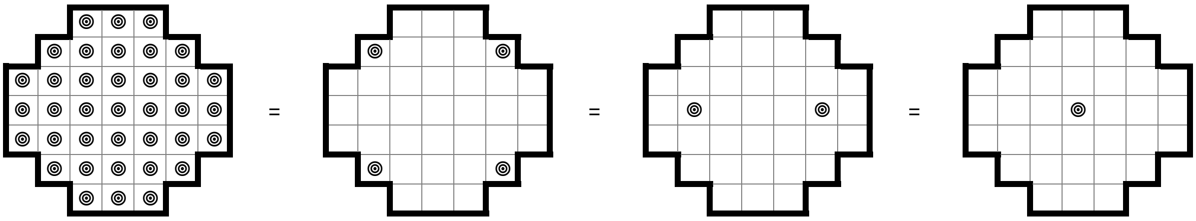
Autre exemple :



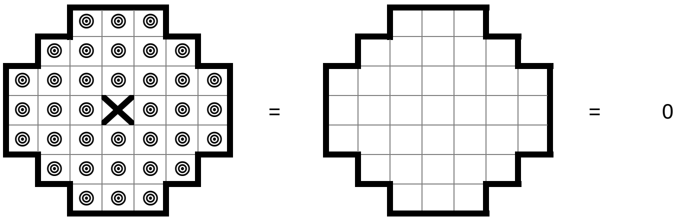
Avec le plateau de départ de gauche, la solution finale sera obligatoirement une bille placée sur l'une des cases noircies du plateau de droite



Solitaire français : *Suppression des billes par ensembles de billes formant des « trios 0 »*



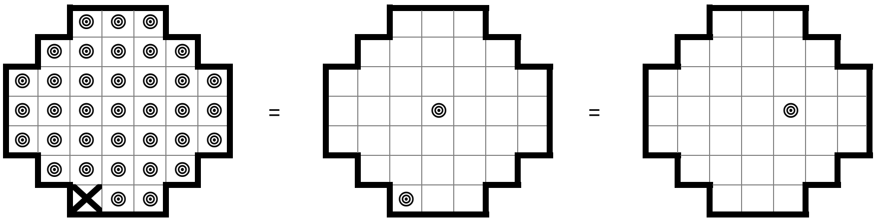
Pour une situation de départ ou la bille centrale est enlevée :

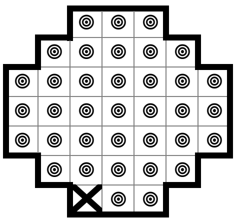


Le solitaire français, auquel la première bille enlevée est celle du centre, est donc impossible à réaliser, puisque il est équivalent à 0. Or un jeu se termine toujours par au moins une bille !

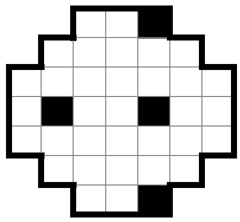
La meilleure solution qu'un joueur puisse obtenir est une solution avec deux billes, équivalente à 0, du type :

Autre proposition de départ :

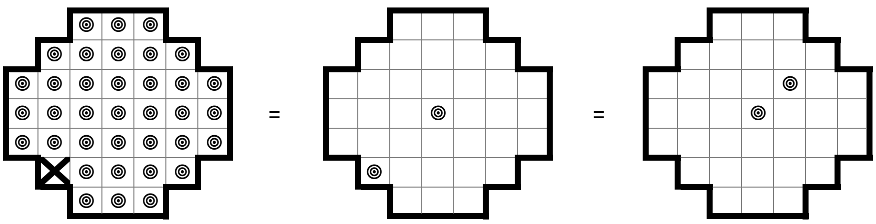




Ainsi, avec le plateau de départ de gauche, la solution finale sera obligatoirement une bille placée sur l'une des cases noircies du plateau de droite



Autre proposition de départ :



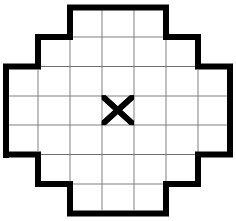
Cette position du doublon montre qu'avec la position initiale ci-dessus, ce jeu est **impossible** à réaliser puisque le plateau n'est pas équivalent à 1.

Les différents cas de figure du solitaire français :

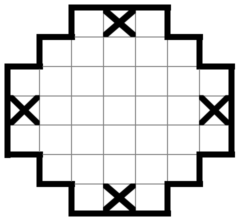
La croix matérialise la position de départ. Les billes ne sont plus représentées.

Remarque : un plateau de n croix représente n cas de figures différentes. Une seule bille est enlevée au plateau de départ.

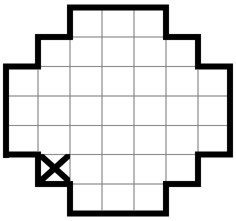
Les réalisations impossibles :



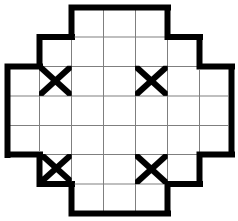
et par équivalence
chacun des 4 plateaux
ci-contre (à droite)



sont impossibles
car équivalent à 0

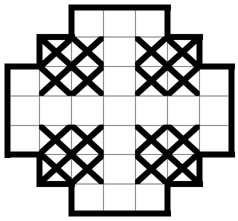


et par équivalence
chacun des 4 plateaux
ci-contre (à droite)



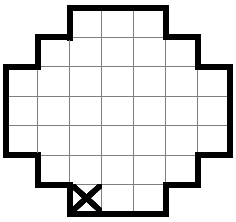
sont impossibles
car équivalent à
un doublon

il suffit de faire pivoter
le plateau d'1/4 de tour,
puis de recommencer,
pour montrer que l'ensemble
des 16 positions ci-contre,
choisies comme position de
départ, rendent le jeu
impossible à réaliser.

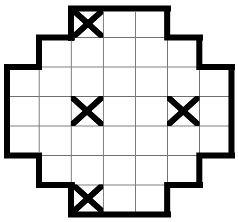


car chacun de ces 16
plateaux de départ
est équivalent à
un doublon.

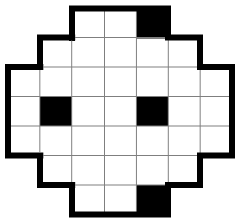
Les réalisations possibles :



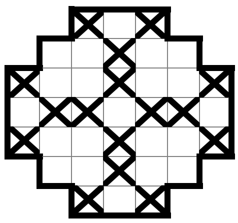
=



La solution finale
de chacun des 4
plateaux de gauche
sera obligatoirement une
bille placée sur l'une
des cases noircies
du plateau de droite



il suffit de faire pivoter
le plateau d'1/4 de tour,
puis de recommencer,
pour montrer que l'ensemble
des 16 positions de départ
présentées ci-contre
sont possibles.



Ce sont les seuls cas possibles, puisque tous les autres ont été évoqués dans les cas impossibles.

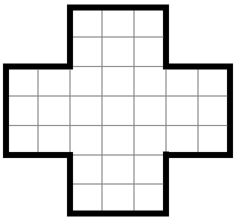
4- / La règle de l'équivalence :

La règle de l'équivalence permet de connaître facilement, à partir de la position de départ, la solution finale et l'emplacement de la dernière bille.

Le chapitre 1 (règle du damier) permet au joueur d'arriver correctement à une dizaine de coups avant la fin de la partie.

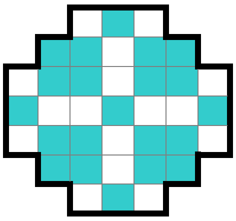
Connaître la position finale du jeu, donc probablement le dernier coup, est un avantage certain : il faut assurer la place des deux dernières billes pour garantir le dernier coup.
(voir chapitre 3 : exemples de parties)

L'utilisation de cette règle est un atout particulièrement efficace pour le joueur, qui doit notamment savoir :



solitaire anglais :

toutes les positions de départ donnent une solution.



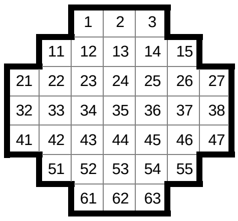
solitaire français :

Avec un départ sur l'une des cases grises, réussir le jeu du solitaire est impossible

Avec un départ sur l'une des autres cases, réussir le jeu du solitaire est possible

<u>Chapitre 3 : réussites commentées</u>

<u>Solitaire français :</u>

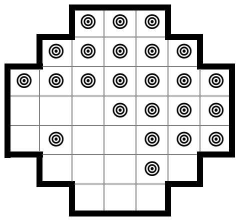


impair = bille noire
pair = bille blanche

Départ : la bille n° 61 est retirée

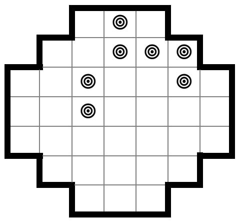
Chaque coup est présenté de la façon suivante :
33 - 51 : la bille située sur la case 33 va sur la case 51 et mange la 42.

63 - 61
44 - 62
55 - 53
52 - 54
34 - 52
51 - 53
62 - 44 reste la bille noire 61 à récupérer
41 - 43
32 - 34
34 - 52
61 - 43
44 - 42 une blanche mange une noire : ce coup peut surprendre car
11 - 33 la bille 42 semble isolée (voir ci-contre)

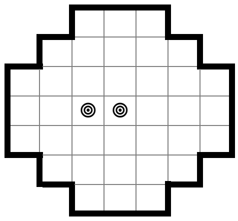


42 - 22
36 - 34
54 - 36
47 - 45
36 - 54 ce coup peut surprendre : là aussi une blanche mange
38 - 36 une noire et permettra ainsi au jeu de respirer.
25 - 45
54 - 36
03 - 25 manger 24 est tentant mais c'est une erreur stratégique : c'est une blanche.
36 - 14
27 - 25
24 - 26 il s'agit maintenant de récupérer 21, sans sacrifier trop de blanches
22 - 24
01 - 23 et pas 01 - 03 !
24 - 22
21 - 23

à la pause :



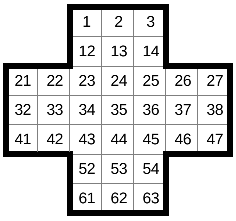
Marquons une pause et observons. Il reste 3 noires et 4 blanches : l'équilibre est bon. La règle de l'équivalence indique que le jeu se termine case 36. Jouer 34 - 12 est tentant mais condamne le jeu. Une fin de jeu où restent 14 et 25 avant le dernier coup semble impossible. Cherchons alors une avant dernière position composée de 34 et 35.



02 - 24
23 - 25
14 - 36
15 - 37
37 - 35
34 - 36 partie gagnée, sur la case 36 comme prévu.

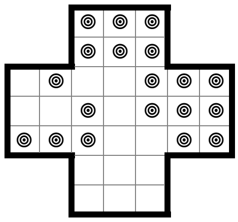
Solitaire anglais :

Départ : la bille n° 35, au centre, est retirée



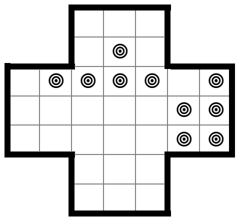
impair = bille noire
pair = bille blanche

53 - 35
42 - 44
61 - 43
35 - 53
62 - 44
44 - 42
41 - 43
46 - 44
63 - 45
44 - 46
21 - 41
22 - 42
24 - 22 voir schéma ci-contre

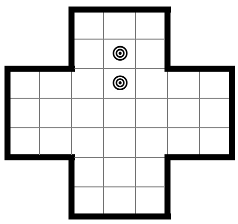


43 - 23
41 - 43
12 - 34
43 - 23 22 - 24 serait ensuite intéressant mais étouffe le jeu.
26 - 24 tournons ensuite autour de 13
03 - 25
01 - 03
36 - 14
03 - 25

Marquons une pause et observons. Il reste 6 boules noires et 4 boules blanches : c'est un léger déséquilibre. La règle de l'équivalence indique que le jeu se termine case 35. Il faudra donc garder la bille 13 et placer une bille en 24 : la 22 doit logiquement faire l'affaire. A noter 2 « trios 0 » : 27-38-47 et 26-37-46 (ce dernier trio est presque formé)



24 - 26
22 - 24
27 - 25
38 - 36
47 - 45
24 - 26
45 - 25
26 - 24
13 - 35 partie gagnée, sur la case 35 comme prévu.



Chapitre 4 : les 16 équivalences

Ce chapitre 4 "Les 16 équivalences" n'est pas fondamental pour aider le joueur à gagner une partie. Il a seulement pour objet d'approfondir la logique mathématique de la règle de l'équivalence, expliquée dans le chapitre 2.

1- / Recensement des équivalences :

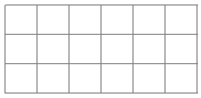
Comme cela a été étudié précédemment, il existe 3 sortes d'équivalences :

l'équivalence 0
l'équivalence 1
l'équivalence doublon.

Un recensement complet des équivalences peut être intéressant. Toutes les positions d'un plateau du jeu du solitaire sont équivalentes à l'une des positions décrites ci-dessous :

L'Équivalence 0 :

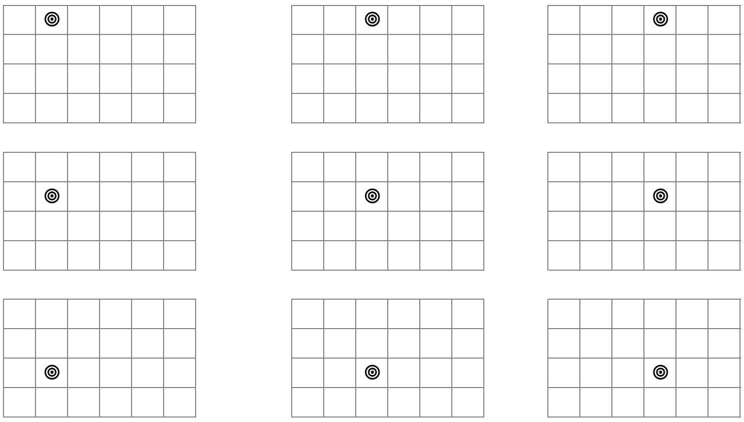
C'est la position connue ci-contre :
elle est bien sûre unique.



Les Équivalences 1 :

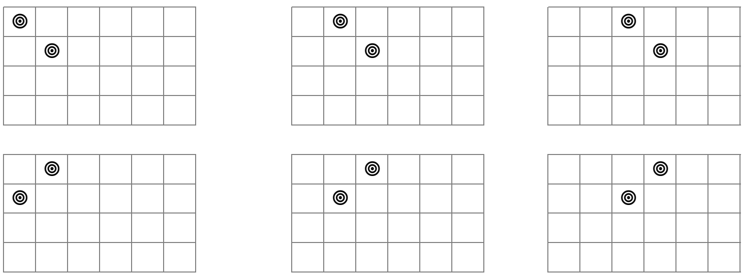
Il existe **9 positions différentes** de l'équivalence 1, non équivalentes entre elles. En revanche, toute autre position ne comportant qu'une seule bille sur le plateau est équivalente à l'une des 9 positions ci-dessous.

L'explication en est simple : comme l'a montré le chapitre 2, une bille est équivalente à une autre bille située 3 cases plus loin, quel que soit le sens dans lequel on se déplace (horizontalement ou verticalement).



Les Équivalences « doublons » :

Il existe **6 positions différentes** de l'équivalence doublon, non équivalentes entre elles. En revanche, toute autre position de doublon est équivalente à l'une des ces 6 positions.



Ce qu'il faut retenir :

Il existe un total de <u>16 équivalences possibles :</u> la **« base 16 »**

équivalence 0 : 1 possibilité
équivalence 1 : 9 possibilités
équivalence doublon : 6 possibilités

Quel que soit le nombre de billes sur un plateau du jeu du solitaire et quelle que soit leur position, <u>ce plateau est équivalent à l'une de ces 16 possibilités.</u>

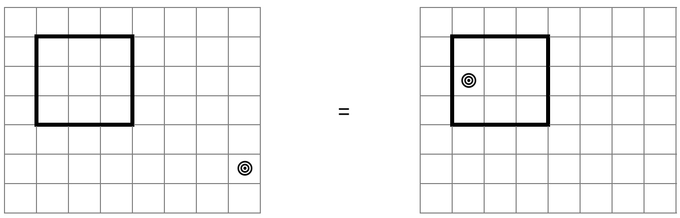
Un joueur commence une partie selon une configuration de départ qu'il choisit : son plateau est équivalent à l'une des 16 équivalences <u>et le reste jusqu'à la fin du jeu</u>.

En effet, chaque coup réalisé permet de passer d'une position à une autre. Deux positions successives sont toujours équivalentes entre elles. Par itération, la position de départ est équivalente à la position finale, puisque jamais une modification de l'équivalence ne vient perturber le cours du jeu.

Est-on sûr qu'il n'y a exactement que 16 équivalences possibles, et non pas plus ? Les deux démonstrations suivantes, la seconde plus élégante que la première, viennent confirmer ce résultat.

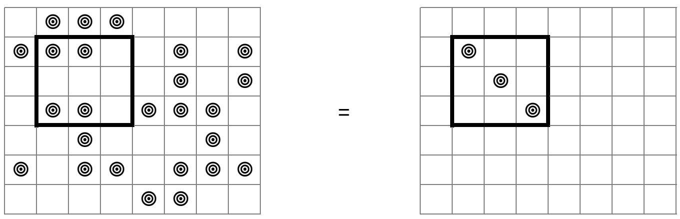
<u>2-/ Démonstration 1 :</u>

Sélectionnons sur un plateau du solitaire un carré de 9 cases, soit 3 x 3.



D'après la règle des équivalences, toute bille située en dehors de ce carré a une bille équivalente à l'intérieur de ce carré. Donc tout plateau du solitaire, quel que soit le nombre de billes et leur position, est équivalent à un ensemble de billes (de 0 à 9) situé à l'intérieur de ce carré.

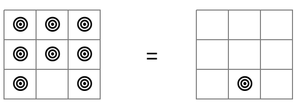
Exemple :

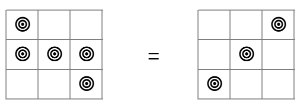


Il existe donc potentiellement 2^9 = 512 équivalences possibles au maximum.

Cherchons donc le nombre d'équivalences différentes dans ce carré de 3 x 3. Dès que 2 billes de ce carré sont alignées, soit horizontalement, soit verticalement, elles sont équivalentes à une bille située sur cette même ligne. Donc toute configuration comprenant des billes alignées est équivalente à une configuration comprenant un nombre inférieur de billes.

Conclusion : les configurations de 4 billes ou plus, incluses dans ce carré de 3 x 3, sont équivalentes à une configuration de 0, 1, 2 ou 3 billes dans ce même carré.





Prenons le cas ou le carré de 3 x 3 comprend 3 billes non alignées : deux cas existent. Soit les billes en diagonale, soit une bille dans un angle et les deux autres au milieu des 2 bords opposés.

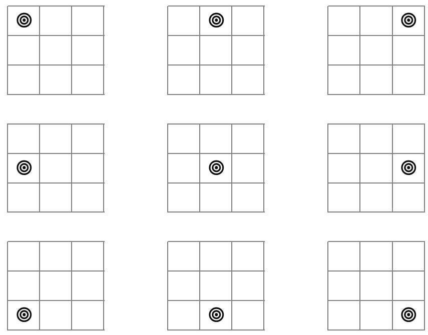
En rajoutant à ces deux configurations 2 billes superposées (c'est à dire en rajoutant un équivalent 0 qui ne modifie en rien l'équivalence d'origine) sur une case bien choisie, on constate qu'elles sont toutes deux équivalentes à une figure comprenant 2 billes (équivalent doublon).

Les configurations comprenant 3 billes sont donc elles aussi équivalentes à des configurations comprenant moins de 3 billes. Restent donc les cas de 0, 1 ou 2 billes. Comme cela était précisé au début du chapitre :

L'Équivalence 0 : elle est bien sûre unique.

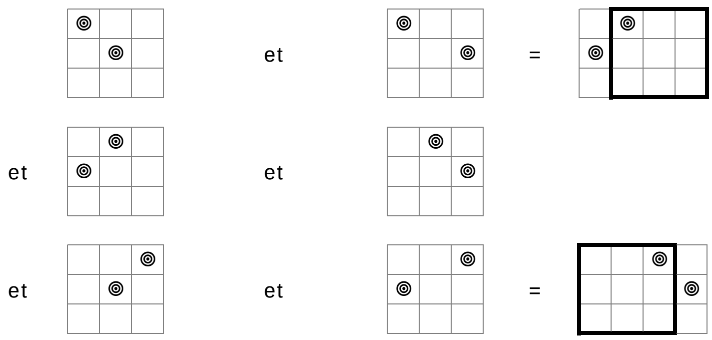
Les Équivalences 1 :

il y a 9 équivalences 1 :

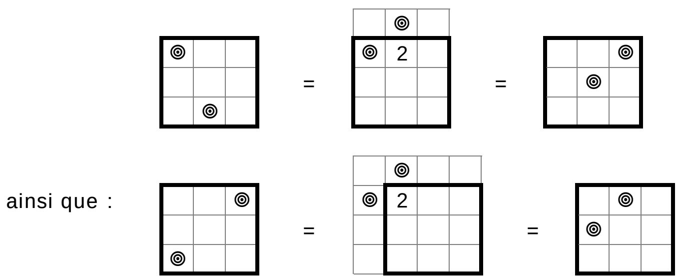


Les Équivalences « doublons » :

Cherchons les combinaisons de billes de la première ligne et de billes de la seconde ligne. Il y a les 6 combinaisons suivantes :



Les autres configurations de 2 billes non alignées, comprenant une bille sur la troisième ligne, ont toutes une position équivalente parmi les 6 précédentes. En effet :



Il y a donc 6 et seulement 6 équivalences doublons.

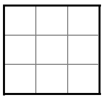
<u>Le recensement des différentes équivalences est donc fait : il y en a bien **1 + 9 + 6 = 16.**</u>

3-/ Démonstration 2 :

Cette démonstration a le même objectif que la précédente, mais elle me semble plus élégante.
Elle commence de la même façon :

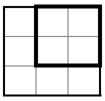
Sélectionnons sur un plateau du solitaire un carré de 9 cases, soit 3 x 3.

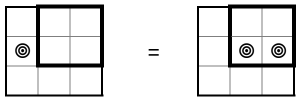
D'après la règle des équivalences, toute bille située en dehors de ce carré a une bille équivalente à l'intérieur de ce carré. Donc tout plateau du solitaire, quel que soit le nombre de billes et leur position, est équivalent à un ensemble de billes (de 0 à 9) situé à l'intérieur de ce carré.



Un carré de 3 x 3, donc 512 équivalences possible au maximum.

Sélectionnons maintenant, à l'intérieur de ce carré de 9 cases, un carré de 4 cases : 2 x 2. Toute bille du carré de 9 cases est équivalente à un ensemble d'une ou plusieurs billes du carré de 4 cases.





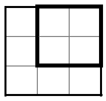
Donc tout carré de 9 cases (et par extension tout plateau du solitaire), quel que soit le nombre de billes et leur position, est équivalent à un ensemble de billes (de 0 à 4) situé à l'intérieur de ce carré de 4 cases.

Quelques exemples vus plus haut :

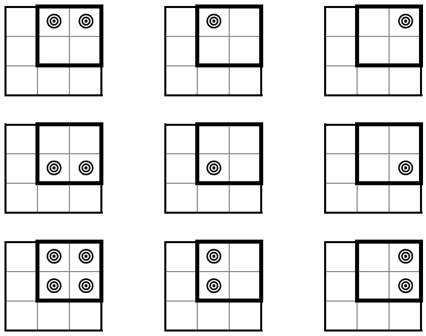
Chaque case comprend 0 ou 1 bille : il existe donc $2^{4} = 16$ équivalences différentes.

Récapitulatif des 16 équivalences :

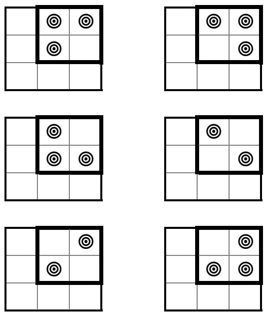
L'Equivalence 0 :



Les Equivalences 1 - il y a donc les 9 équivalences suivantes :



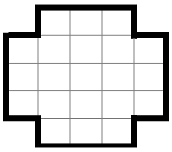
Les Equivalences doublons - il y a donc les 6 équivalences suivantes :



Chapitre 5 : le mini-solitaire

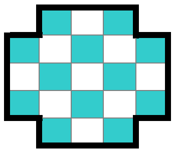
Ce chapitre a pour objet d'appliquer les deux règles précédemment décrites (règle du damier et règle de l'équivalence), sur une nouvelle forme de solitaire : le mini-solitaire.

Le chapitre suivant a le même objectif, sur le « grand solitaire »



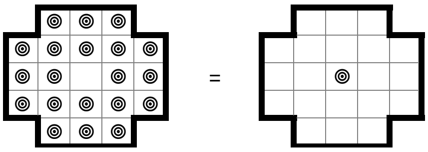
le mini-solitaire

auquel est appliqué la règle du damier :



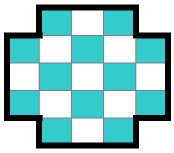
Dans ce chapitre, nous ne traiterons que le mini-solitaire dont on aura retiré la bille centrale pour démarrer. L'application des règles du damier et de l'équivalence seront suffisamment explicites pour être utilisées dans les autres cas par le lecteur.

Application de la règle de l'équivalence :



Si ce damier peut être résolu, alors la situation finale est celle de droite, la dernière bille restant sur le plateau étant la bille centrale.

Application de la règle du damier :



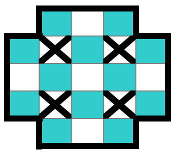
Ce plateau comprend 12 billes noires pour 9 billes blanches.

On peut constater aussi qu'il comprend 8 billes noires situées sur un bord, pour 9 billes blanches au total. Pour terminer le jeu, il faut donc procéder à 8 « sacrifices » de billes blanches.

Rappel de ce qu'est un sacrifice : *pour qu'une billle noire située sur un bord puisse être mangée, il est nécessaire qu'elle mange d'abord une blanche, afin qu'elle soit sur une case lui permettant de se faire manger.*

Regardons de plus près les 9 billes blanches : en réalité, seules 4 sont en position d'être éventuellement sacrifiées. Les autres billes blanches ne peuvent jamais se retrouver sur une case permettant le sacrifice, puisque les billes se déplacent de 2 cases en 2 cases.

Les 4 blanches susceptibles d'être sacrifiées :

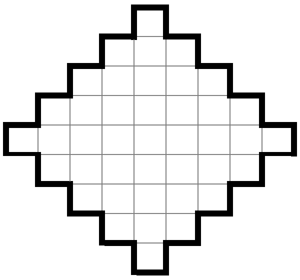


Il faut 8 sacrifices de blanches, or seules 4 sont disponibles pour être sacrifiées.

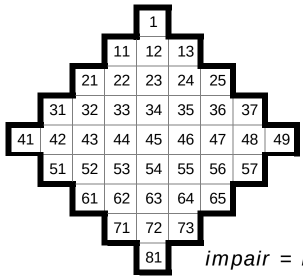
Le mini-solitaire est donc impossible à réaliser. 4 billes noires au moins, situées sur les bords, n'auront pas bougées de place lorsque le jeu sera déjà bloqué.

<u>Chapitre 6 : le grand solitaire</u>

Il s'agit dans ce chapitre d'appliquer les deux règles précédemment décrites (règle du damier et règle de l'équivalence), sur une nouvelle forme de solitaire : le grand-solitaire.



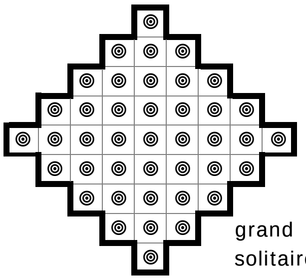
Ci-contre le Grand Solitaire auquel on applique la numérotation des cases :



impair = bille noire
pair = bille blanche

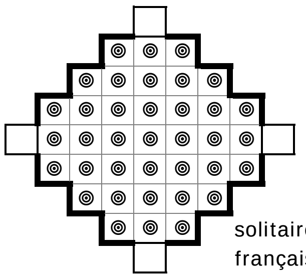
<u>1- Application de la règle de l'équivalence :</u>

Pour un plateau complet, auquel aucune bille n'a été retirée, nous avons :



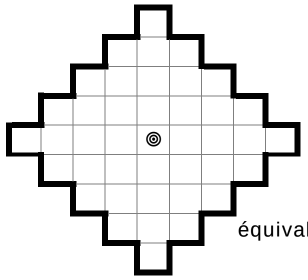
grand solitaire

=



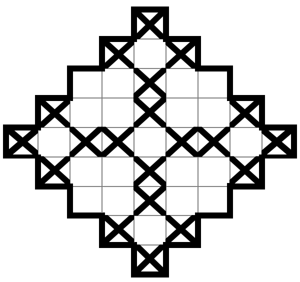
solitaire français

=



équivalent 1

Par comparaison avec le solitaire français, les plateaux de départ qui permettent la résolution du grand solitaire sont les suivants (comme dans les chapitres précédents, les points de départ sont marqués d'une croix et les billes ne sont pas représentées) :



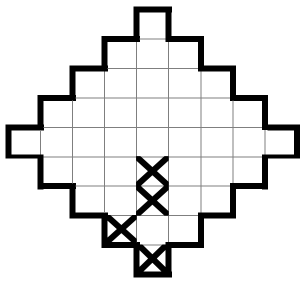
Il y a donc 20 solutions de départ possible permettant la résolution du solitaire.

Plus exactement, il y en a 20 qui <u>permettraient</u> la résolution du grand solitaire : un départ sur les cases non marquées d'une croix exclue la réussite du jeu. Les paragraphes et chapitres ci-après montreront que seule une partie de ces 20 départs rend possible la réussite du jeu.

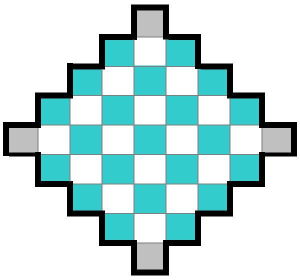
Par rotation du plateau ou par effet de miroir, ces 20 possibilités de départ peuvent se résumer aux quatre possibilités ci-contre :

Ce sont ces quatres configurations possibles que nous allons donc étudier dans la suite de ce chapitre.

Elles ont pour point de départ l'une des 4 cases suivantes : 54, 63, 71, 81.



2- Application de la règle du damier :



Quelle que soit la position de départ qui sera choisie, le damier du grand solitaire nous apprend :

1-/ il y a 25 cases noires pour 16 cases blanches.

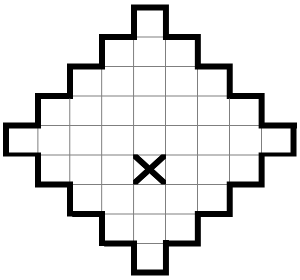
2-/ sur les 25 cases noires, 16 cases noires sont situées sur un bord. Toute bille noire située sur l'une de ces cases nécessite de manger une bille blanche, « sacrifiée », pour pouvoir être mangée à son tour.

La principale difficulté du grand solitaire, sur les 4 cas que nous allons étudier, réside dans l'équilibre de départ : 16 billes noires nécessitant le sacrifice d'une blanche / 16 billes blanches.

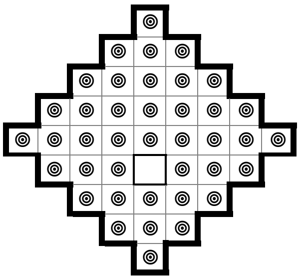
Les 4 configurations évoquées précédemment vont être traitées les unes après les autres.

3- Grand solitaire avec départ case 54 :

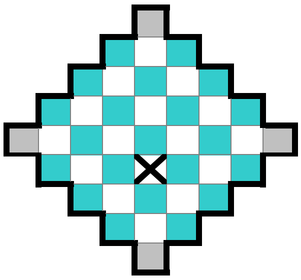
Etudions donc ce premier cas de figure :



s'écrit aussi :



Appliquons la règle du damier :



Pour le départ, la bille 54 est retirée du plateau.

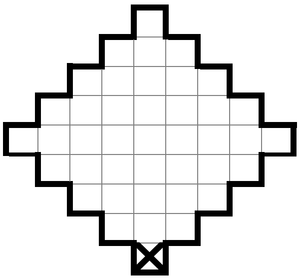
Il reste donc :
- 15 billes blanches
- 16 billes noires nécessitant chacune le sacrifice d'une blanche.

Au mieux, en approchant de la fin du jeu, il restera 2 noires situées sur un bord du jeu ainsi qu'une bille blanche. La quinzième bille noire (du bord du plateau) mangera la quinzième bille blanche : il restera alors au moins 2 billes noires et plus aucune blanche. La partie sera terminée et perdue.

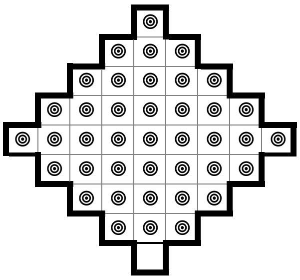
Cette configuration du grand solitaire (case de départ 54) **est impossible à réaliser.**

4- Grand solitaire avec départ case 81 :

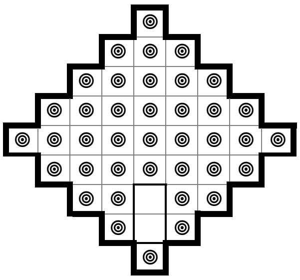
Etudions ce second cas de figure :



s'écrit aussi :



Compte-tenu de la position de départ, le premier coup est obligatoirement : 63 - 81



Appliquons après ce premier coup la règle du damier :

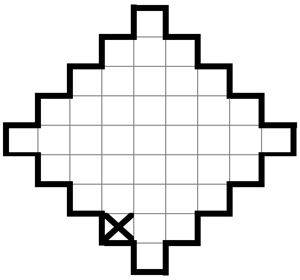
Il reste donc :
- 15 billes blanches
- 16 billes noires nécessitant chacune le sacrifice d'une blanche.

Nous retrouvons le même cas de figure que pour un départ du grand solitaire en case 54, et donc une impossibilité de réussite.

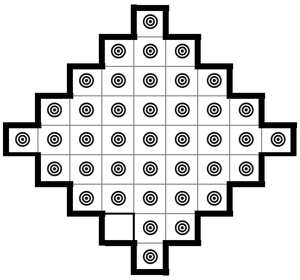
Cette configuration du grand solitaire (case de départ 81) **est impossible à réaliser.**

5- Grand solitaire avec départ case 71 :

Etudions ce troisième cas de figure :

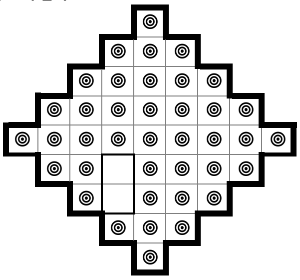


s'écrit aussi :

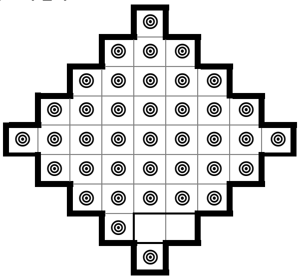


Pour le départ, deux possibilités : jouer 53 - 71 ou bien 73 - 71. Après le premier coup, nous obtenons :

53 - 71 :



73 - 71 :



Appliquons après ce premier coup la règle du damier :

Après le coup 53 - 71, il reste :
- 15 billes blanches
- 16 billes noires nécessitant chacune le sacrifice d'une blanche.

Comme pour les cas précédents, ce départ 53 - 71 mène à une situation **impossible à réaliser.**

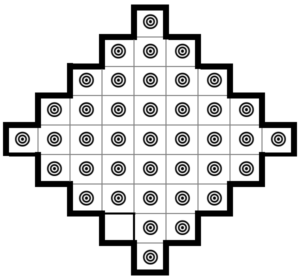
En revanche, après le coup 73 - 71, il reste :
- 15 billes blanches
- 15 billes noires nécessitant chacune le sacrifice d'une blanche.

Poursuivons donc cette partie. Compte-tenu de l'équilibre parfait de départ après 1 coup (73 - 71), entre noires situées sur les bords et blanches qui doivent être sacrifiées, nous pouvons en déduire :

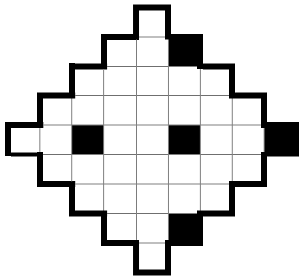
1-/ pendant le déroulement du jeu, toutes les blanches qui seront mangées devront l'être dans le cadre d'un « sacrifice ». Si le joueur n'applique pas ce principe, il est certain de provoquer un déséquilibre et de ne pas réussir sa partie.

2-/ en respectant la règle ci-dessus, le joueur termine son jeu avec, avant le dernier coup, une bille blanche et une bille noire. Le dernier coup est donc obligatoirement le sacrifice d'une blanche : une noire située sur un bord mange cette dernière blanche lors du dernier coup.

Appliquons maintenant la règle de l'équivalence :



Ainsi, avec le plateau de départ de gauche, la solution finale sera obligatoirement une bille placée sur l'une des cases 5 noircies du plateau de droite



En appliquant la règle du damier ci-dessus, on doit donc retenir :

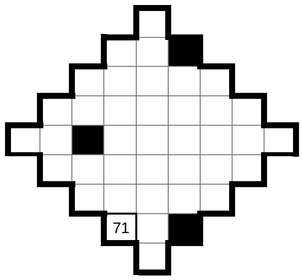
- dans le dernier coup, une noire mange une blanche : la case finale ne peut donc être la case blanche 46.
- le dernier coup est obligatoirement joué par une noire située sur un bord (à l'origine du coup).

Les seuls derniers coups possibles sont donc :

71 - 73 (possible puisque le premier coup du jeu a placé une noire en 71)
11 - 13
21 - 43
61 - 43
41 - 43

Résumé :
Cette configuration du grand solitaire (case de départ 71) **semble donc possible à réaliser.**
Le premier coup est alors obligatoirement : 73 - 71.

La bille finale sera donc placée sur l'une des 3 cases noircies :
pour le dernier coup, seuls 5 coups permettraient de terminer le jeu.

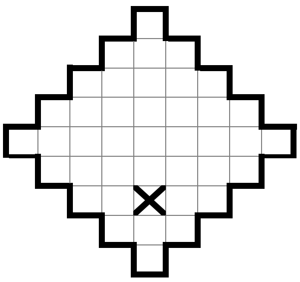


71 - 73
11 - 13
21 - 43
61 - 43
41 - 43

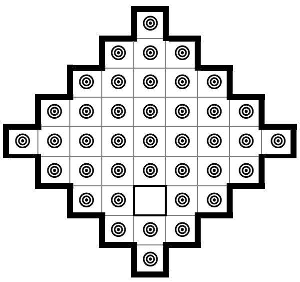
Les chapitres suivants réduiront encore ces possibilités.

6- Grand solitaire avec départ case 63 :

Etudions ce quatrième cas de figure :



s'écrit aussi :



Pour le départ, quatre possibilités :
45 - 63
ou 61 - 63
ou 65 - 63
ou 81 - 63

Appliquons après ce premier coup la règle du damier :

Après le coup 45 - 63, il reste :
- 15 billes blanches
- 16 billes noires nécessitant chacune le sacrifice d'une blanche.

Ce départ 45 - 63 mène à une situation **impossible à réaliser.**

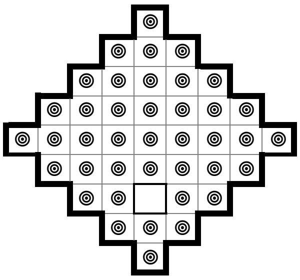
En revanche, après l'un des 3 autres départs 61 - 63, 65 - 63 ou 81 - 63, il reste :
- 15 billes blanches
- 15 billes noires nécessitant chacune le sacrifice d'une blanche.

Ces trois départs semblent permettre la réussite de la partie.

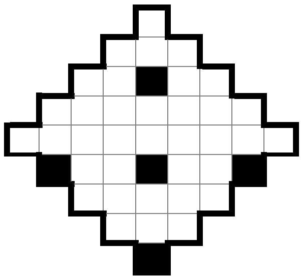
Comme la configuration précédente (départ case 71), nous pouvons en déduire :

1-/ pendant le déroulement du jeu, toutes les blanches qui seront mangées devront l'être dans le cadre d'un « sacrifice ». Si le joueur n'applique pas ce principe, il est certain de provoquer un déséquilibre et de ne pas réussir sa partie.
2-/ en respectant la règle ci-dessus, le joueur termine son jeu avec, avant le dernier coup, une bille blanche et une bille noire. Le dernier coup est donc obligatoirement le sacrifice d'une blanche : une noire située sur un bord mange cette dernière blanche lors du dernier coup.

Appliquons maintenant la règle de l'équivalence :



Ainsi, avec le plateau de départ de gauche, la solution finale sera obligatoirement une bille placée sur l'une des cases 5 noircies du plateau de droite



En appliquant la règle du damier ci-dessus, on doit donc retenir :

- dans le dernier coup, une noire mange une blanche : la case finale ne peut donc être la case blanche 54.
- le dernier coup est obigatoirement joué par une noire située sur un bord (à l'origine du coup). La case finale ne peut donc être la case noire 81.

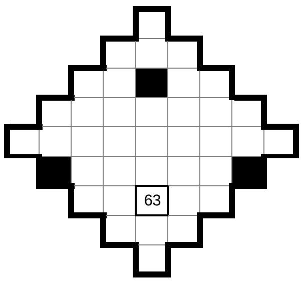
Les seuls derniers coups possibles sont donc :

21 - 23, ainsi que 25 - 23 qui lui est identique (par effet de miroir)
1 - 23,
31 - 51, ainsi que 37 - 57 qui lui est identique (par effet de miroir)

Résumé :
Cette configuration du grand solitaire (case de départ 63) est donc possible à réaliser.

Trois départs permettent la réussite de la partie :
61 - 63
ou 65 - 63 (identique à 61 - 63 par effet de miroir)
ou 81 - 63

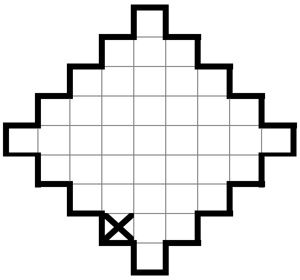
La bille finale sera donc placée sur l'une des 3 cases noircies ci-contre.



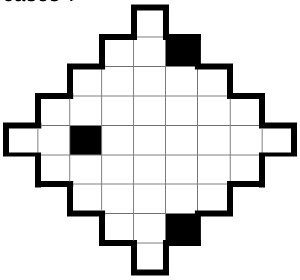
7- Récapitulatif :

Pour le « grand solitaire », les seules configurations possibles sont les suivantes :

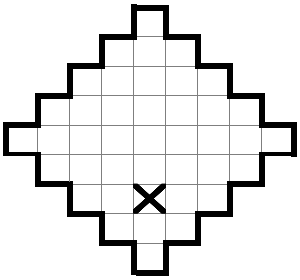
Départ sur la case :



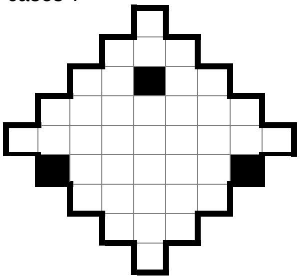
pour une fin sur
l'une des trois cases :



Départ sur la case :



pour une fin sur
l'une des deux cases :



... Ainsi que toutes les configurations semblables par rotation du plateau du solitaire ou par effet de miroir.

Dans les chapitres suivants, il sera montré que ***l'une des configurations ci-dessus n'est pas réalisable.***

La réalisation de ces différentes configurations du jeu de Grand Solitaire nécessitent l'application stricte de deux principes :

1-/ la règle du damier : compte-tenu du nombre de billes blanches et noires et leur position, seules les billes noires situées en bord de plateau peuvent manger une bille blanche, qui est ainsi sacrifiée. En aucun cas, une bille noire qui n'est pas sur un bord ne doit manger une bille blanche.

2-/ le premier et le dernier coup : seuls les coups évoqués dans ce présent chapitre, pour le départ comme pour le coup final, permettent la réalisation du solitaire. Ces coups (premier et dernier) ont comme caractéristique d'être réalisés par une bille noire sautant une blanche, cette bille noire étant, à l'origine du coup, située sur un bord.

Chapitre 7 : l'inversé

La règle de l'inversé est particulièrement simple. Mais si elle n'a pas été présentée jusqu'à présent, c'est parce qu'elle trouve toute sa pertinence seulement maintenant, pour conclure sur les possibilités ou les impossibilités du "Grand Solitaire".

L'origine de cette règle revient au philosophe Leibnitz, qui semble-t-il aimait jouer au solitaire à l'envers, en partant d'un plateau quasiment vide (1 bille) et en remplissant le plateau au fur et à mesure. L'objectif était de « reconstruire » le plateau du solitaire, plutôt que de procéder à sa « démolition ».

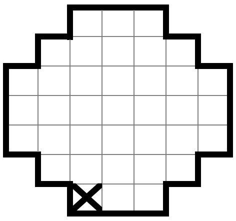
> *"Le jeu nommé le solitaire m'a plu assez. Je l'ai pris d'une manière renversée, c'est à dire qu'au lieu de défaire un composé de pièces selon la loi de ce jeu, qui est de sauter dans une place vide et d'ôter la pièce sur laquelle on saute, j'ai cru qu'il serait plus beau de rétablir ce qui a été défait, en remplissant un trou sur lequel on saute (...) Mais à quoi bon cela ? Dira-t-on. Je répond : à perfectionner l'art d'inventer. Car il faudrait avoir des méthodes pour venir à bout de tout ce qui peut se trouver par raison."*
>
> *Leibnitz, janvier 1716, d'après E. Lucas.*

Depuis, les quelques recherches faites sur cette façon de jouer au solitaire "à l'envers", ont vite montrées que le jeu était exactement le même. Il suffit de remplacer chaque bille par un trou et chaque trou par une bille, et l'envers devient l'endroit, l'endroit devient l'envers.

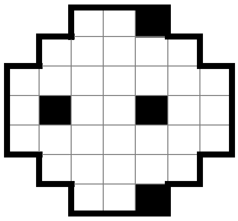
Mais de cette simple démarche, une règle utile peut être retirée. C'est la **règle de l'inversé :**
Lorsqu'un joueur commence son jeu en retirant une bille sur une case A, et qu'il le termine sur une case Z, alors le chemin inverse peut aussi être réalisé en respectant la règle du solitaire. Le jeu peut donc être réussi en commençant à la case Z, et en finissant case A.

1-/ Un exemple : le solitaire français.

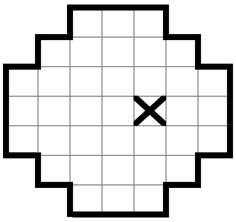
Comme nous l'avons vu au chapitre 2 :



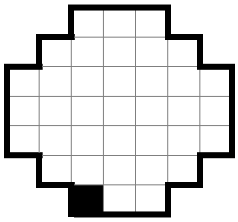
Avec le plateau de départ de gauche, la solution finale sera obligatoirement une bille placée sur l'une des cases noircies du plateau de droite



Appliquons la règle de l'inversé :



Avec le plateau de départ de gauche, la solution finale peut être une bille placée sur la case noircie du plateau de droite



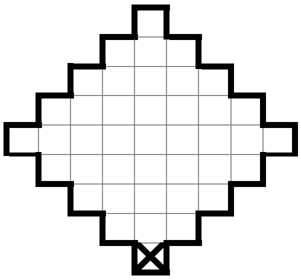
Ceci est bien une configuration que le Chapitre 2 indiquait comme possible.

2-/ Application de la règle de l'inversé au grand solitaire :

Le grand solitaire avec départ case 81 est impossible, comme cela a été vu au chapitre précédent.

Donc quel que soit la configuration de départ, finir sur la case 81 est impossible.

Par rotation du plateau, finir sur les cases 1, 41, 49 et 81 est impossible.



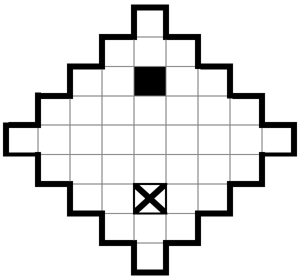
Ainsi, comme cela a été montré dans le chapitre précédent mais par une autre méthode, le cas du grand solitaire avec départ case 71 ne peut se terminer case 49.

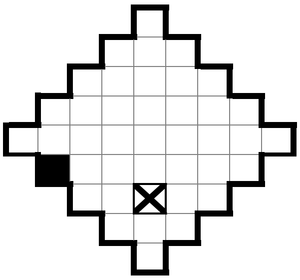
On peut ainsi répertorier ci-dessous l'ensemble des cas possibles de réalisation du grand solitaire. Toutes les autres situations leur sont semblables, soit par rotation, soit par effet de miroir, soit par application de la règle de l'inversé.

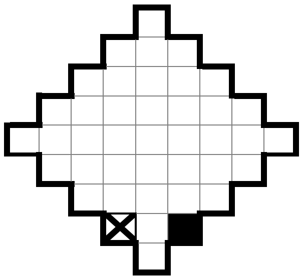
⊠ représente la case de départ *(ou inversement la case finale)*

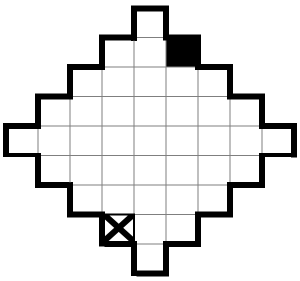
■ représente la case finale *(ou inversement la case de départ)*

<u>Les seuls grands solitaires réalisables sont :</u>







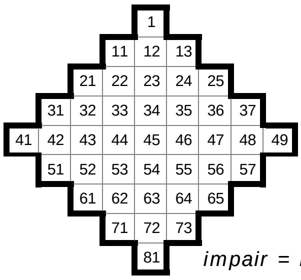


A noter que la **quatrième solution** ci-contre n'a en réalité **pas de solution.**

Les recherches faites par MM. Hermary, Mantel, Redon et Chicandard à la fin du XIX° siècle, et dont les travaux sont évoqués dans l'ouvrage d'Edouard Lucas « Récréations mathématiques », ne mentionnent pas cette position dans les "solitaires possibles", mais ne démontrent pas non plus l'impossibilité de cette configuration. Les 3 autres configurations ont été résolues par ces personnes.

Le chapitre 9 démontrera l'impossibilité de ce quatrième cas, tandis que le chapitre 10 décrira la résolution d'une partie avec un départ case 71 et un final case 73.

Chapitre 8 : Blanche-Neige



impair = bille noire
pair = bille blanche

Le but de ce chapitre est de donner une méthode fiable pour la résolution du Grand Solitaire. Il s'agit en effet probablement du solitaire le plus difficile à réaliser, si le joueur ne possède pas les clés permettant sa réussite.

1-/ Les premières clés :

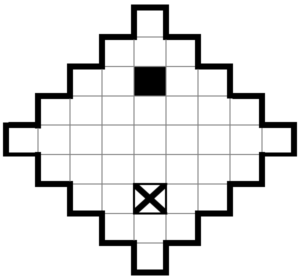
Nous avons déjà vu, dans les 2 chapitres précédents, deux clés essentielles :

1-/ la règle du damier : compte-tenu du nombre de billes blanches et noires et leur position, seules les billes noires situées en bord de plateau peuvent manger une bille blanche, qui est ainsi sacrifiée. En aucun cas, une bille noire qui n'est pas sur un bord ne doit manger une bille blanche.

2-/ le premier et le dernier coup : seuls les coups évoqués dans le chapitre 6, pour le départ comme pour le coup final, permettent la réalisation du solitaire. Ces coups (premier et dernier) ont comme caractéristique d'être réalisés par une bille noire sautant une blanche, cette bille noire étant à l'origine du coup située sur un bord.

Reprenons les résultats du chapitre 6 :

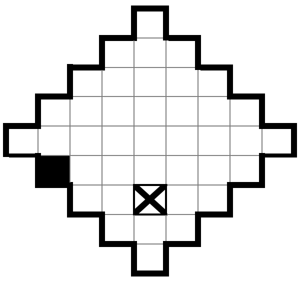
représente la case de départ *(ou inversement la case finale)*
représente la case finale *(ou inversement la case de départ)*



Départ case 63 :

Premier coup :
61 - 63
ou 65 - 63 (identique à 61 - 63 par effet de miroir)
ou 81 - 63

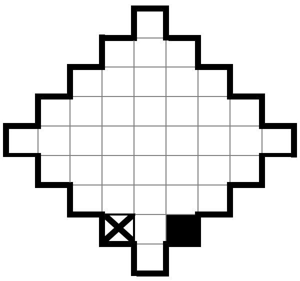
Dernier coup :
21 - 23
ou 25 - 23 (identique à 21 - 23 par effet de miroir)
ou 1 - 23



Départ case 63 :

Premier coup :
61 - 63
ou 65 - 63 (identique à 61 - 63 par effet de miroir)
ou 81 - 63

Dernier coup :
31 - 51



Départ case 71 :

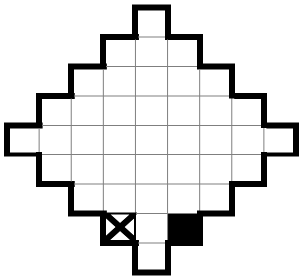
Premier coup :
73 - 71

Dernier coup :
71 - 73

Nous laissons de côté pour l'instant le quatrième cas, d'un départ case 71, et d'une fin case 13.
Ce solitaire sera traité au chapitre 9 pour montrer l'impossibilité de sa réalisation.

2-/ Quelques blanches nommées « blanches-neige » :

Etudions le cas du grand solitaire dont le **départ** est **case 71,** et 73 pour case finale.



Le premier coup est obligatoirement : **73 - 71**

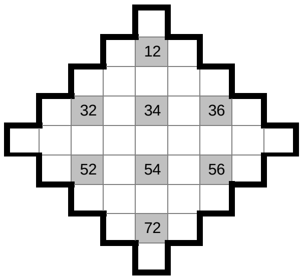
En application de la règle du damier, le second coup ne peut pas être 55 - 73, puisque une noire qui n'est pas sur un bord devrait alors manger une blanche.

Le seul second coup possible est donc : **54 - 72**

Par application de la règle de l'inversé, nous avons donc :

Dernier coup : **71 - 73**

Avant-dernier coup : **54 - 72**



Regardons maintenant les cases blanches suivantes (en grisé sur le schéma ci-contre) :

Les billes blanches situées sur ces cases ont la caractéristique de pouvoir, en mangeant, aller sur chacune de ces mêmes cases blanches en sautant de 2 cases en 2 cases. Les autres billes blanches ne peuvent aller sur ces cases.

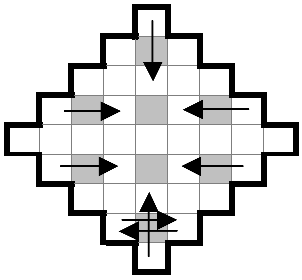
Ces billes blanches sont au nombre de 8, et comme pour les autres, sont destinées à être sacrifiées.

Appelons ces 8 billes les **« blanches - neige »**, et regardons quels sont les sacrifices qui les concernent obligatoirement :

La case 72 sert de case du sacrifice :	au premier coup	**73 - 71**
	au dernier coup	**71 - 73**
	pour sortir la bille 81	**81 - 63**
La case 52 sert de case du sacrifice :	pour sortir la bille 51	**51 - 53**
La case 32 sert de case du sacrifice :	pour sortir la bille 31	**31 - 33**
La case 36 sert de case du sacrifice :	pour sortir la bille 37	**37 - 35**
La case 56 sert de case du sacrifice :	pour sortir la bille 57	**57 - 55**
La case 12 sert de case du sacrifice :	pour sortir la bille 1	**1 - 23**

Aucun autre coup ne nécessite de sacrifier, de façon obligatoire, une « blanche - neige ».

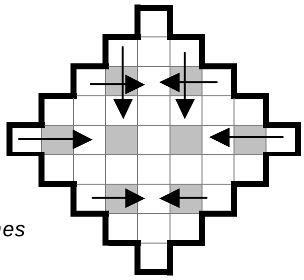
Ces coups sont obligatoires parce qu'ils permettent (en dehors du 1er coup et du dernier coup qui sont particuliers) de « sortir » du bord du plateau les billes noires répertoriées ci-dessus, en les plaçant sur une case où elles deviendront « mangeables ».



Il y a donc 8 billes « blanches - neige », et 8 sacrifices obligatoires à partir des cases « blanche - neige ». Cette égalité parfaite donne une nouvelle clé pour la résolution du grand solitaire.

Troisième clé : Pour le grand solitaire dont le départ est case 71, les 8 billes « blanches - neige » ne doivent être sacrifiées que dans la cadre d'un des 8 sicrifices obligatoire listés ci-dessus, et **en aucun cas par un autre coup**.

En conséquence, puisque les sacrifices des 8 billes blanches-neige sont tous forcés, les sacrifices des 8 autres billes blanches le sont aussi.



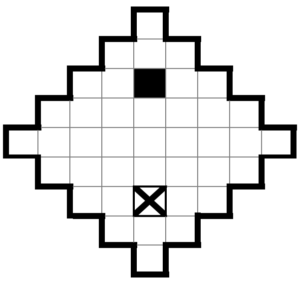
sacrifices des blanches non blanches-neige

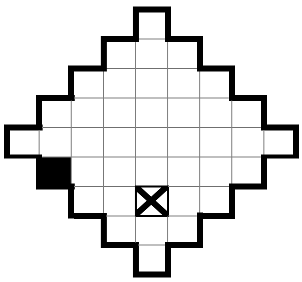
<u>Conclusion :</u> Pour le grand solitaire dont le départ est case 71, ainsi que pour ses symétriques par effet de miroir ou rotation du plateau, la réussite d'une partie ne peut se faire que par l'application de trois règles (les 3 clés ci-dessus), particulièrement contraignantes.

On peut aussi en conclure que cette forme de solitaire, si elle est particulièrement difficile à résoudre pour celui qui n'en détient pas les clés, n'est pas la forme la plus intéressante : le joueur a beaucoup moins la liberté de s'exprimer et de trouver de nouveaux chemins, que dans le cas du solitaire français ou anglais. Parmi les différentes formes de solitaire, le « solitaire français » me semble le plus intéressant : il marie difficulté de réalisation et multiplicité des solutions, ce qui permet au joueur de sans cesse innover.

3-/ « blanches-neige » pour les autres grands solitaires :

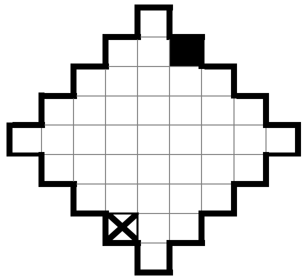
Pour les deux configurations ci-contre, il y a toujours 8 cases blanches-neige. Cependant les sacrifices qui les concernent de façon obligatoire ne sont plus, comme précédemment, au nombre de 8 mais en nombre inférieur.





La réalisation de ces deux configurations de solitaire est donc moins complexe, ou plutôt moins contrainte que dans le cas du grand solitaire avec 71 pour case de départ et 73 pour case finale.

4- / Le cas non encore résolu du solitaire : départ case 71, finale case 13 :

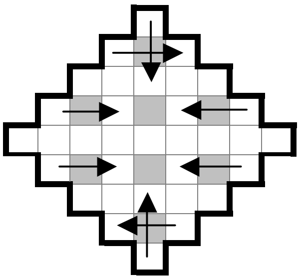


L'impossibilité de réalisation de ce solitaire sera démontrée dans le chapitre suivant, appelé « le désordre ». Cependant l'observation des billes blanches-neige, traitée dans le présent chapitre, servira à la démonstration du chapitre 9.

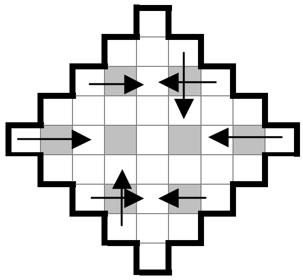
Le cas de ce solitaire est, sur la question de la répartition des billes blanches-neige, identique au cas du solitaire étudié précédemment : début case 71, fin case 73.

Il y a donc 8 billes « blanches - neige », et 8 sacrifices obligatoires à partir des cases « blanche - neige ». Cette égalité parfaite contraint comme précédemment la résolution du grand solitaire.

sacrifices « obligatoires » des 8 billes blanches-neige :



sacrifices des 8 billes blanches non blanches-neige



Les 16 sacrifices des billes blanches sont donc intégralement répertoriés, sans marge de manœuvre pour le joueur.

Ce résultat est important pour le chapitre suivant et la démonstration de l'impossibilité de cette configuration du grand solitaire.

Chapitre 9 : le désordre

Le désordre étant finalement… un ordre différent, adoptons une nouvelle méthode pour jouer au solitaire. Plutôt que de faire une partie avec chaque coup l'un après l'autre, pourquoi pas faire les mêmes coups, mais par exemple le 5ème à la place du 2ème, le 8ème à la place du 11ème, et donc de mélanger l'ordre de tous les coups.

Pour adopter cette façon de faire, il suffit de remplacer une bille par le chiffre 1, et lorsqu'il y a 2 billes ou 3 billes sur une même case, il apparaît le chiffre 2 ou 3. Il est donc possible d'avoir des chiffres négatifs sur une case.

Finalement, un solitaire fait dans l'ordre peut être fait à l'identique dans le désordre. La seule différence, c'est que pour jouer un coup dans l'ordre, il faut 1 dans une case, 1 dans la case d'à côté, et 0 dans une troisième. Le jeu dans le désordre peut se faire dans n'importe quel ordre : l'intérêt de cette démarche est que le résultat final (1 bille restant sur le plateau) ne dépend pas de l'ordre (ou du désordre…) des coups. Ainsi nous pouvons choisir le sens de notre désordre !

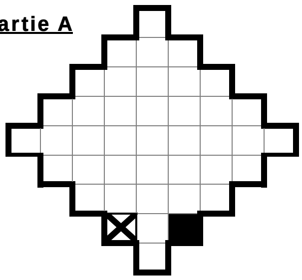
Nous pouvons donc choisir l'ordre des coups à notre convenance et regarder ainsi si le solitaire peut se réaliser. La logique veut :

Si un solitaire peut se réaliser dans l'ordre, il peut donc se réaliser dans le désordre, et donc dans n'importe quel sens de désordre !

En revanche, si un solitaire ne peut pas se réaliser dans le désordre, il ne peut pas se réaliser dans l'ordre.

Menons par comparaison deux parties simultanées, nommées A et B, de grand solitaire :

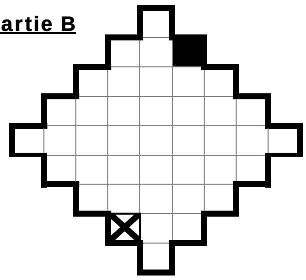
Partie A



Départ case 71

Final case 73 pour le solitaire de gauche, et case 13 pour celui de droite.

Partie B

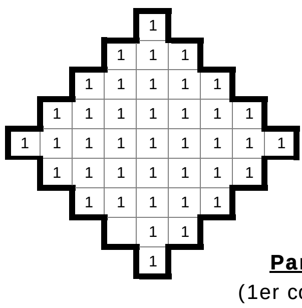


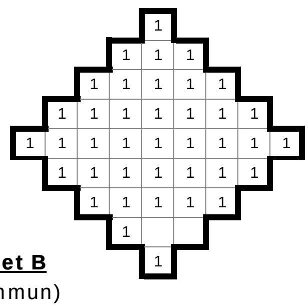
au départ… … et après le 1er coup

Pour rendre plus lisible le contenu des cases, le 0 n'est pas affiché.

Le départ est le même pour les deux parties, comme cela a été vu dans le chapitre 6. Le premier coup est :

73 - 71





Parties A et B

(1er coup commun)

Le chapitre 6 a aussi montré quel était le seul dernier coup possible :

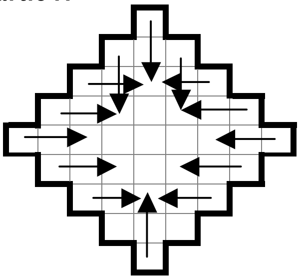
71 - 73 pour le premier cas (partie A),

11 - 13 pour le second (partie B).

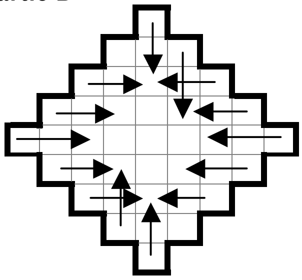
Le chapitre précédent (« Blanche-neige ») nous apprend que pour la réussite de la partie A comme de la partie B, tous les sacrifices des billes blanches sont « forcés » : procédons d'abord sur chacune des deux parties, en jouant dans un désordre bien choisi, à tous ces sacrifices sauf le premier (déjà fait), et le dernier, celui-ci correspondant au dernier coup dans une partie faite dans l'ordre. Cela fait donc 16 - 2 = 14 coups à jouer.

Les 14 coups joués sont donc :

Partie A

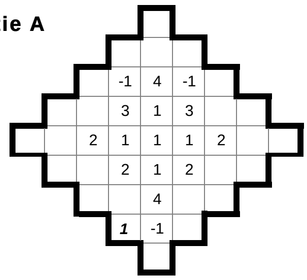


Partie B



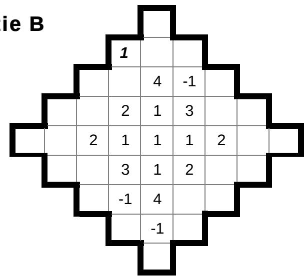
On obtient pour nos deux parties simultannées :

Partie A



Le chiffre 1 en *italique* correspond à la dernière bille noire qui sera jouée.

Partie B

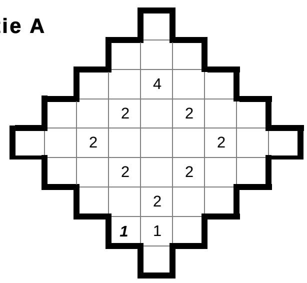


Une fois que les billes noires ont mangé les billes blanches (sauf la dernière), nous savons qu'elles ne peuvent plus manger. Dans notre partie simultannée dans le désordre (désordre toujours bien choisi !), la main est donc entièrement aux billes blanches (le total des billes blanches est 1).

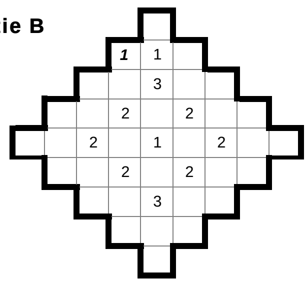
On s'aperçoit que les coups restants, faits par les billes blanches, sont interchangeables.

Amenons par un jeu de suppression de sauts de billes blanches, une dernière bille blanche vers sa dernière case (près de la bille noire 1 en gras), quitte à laisser encore d'autres billes noires sur le plateau. On obtient :

Partie A

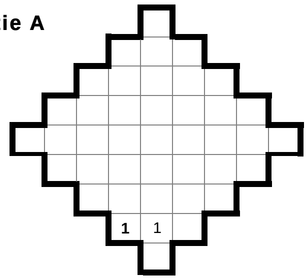


Partie B

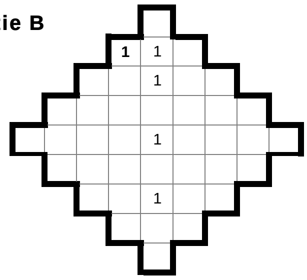


Finalement cette dernière bille blanche laissée sur le plateau peut encore se promener en manger quelques billes noires. On obtient ainsi :

Partie A

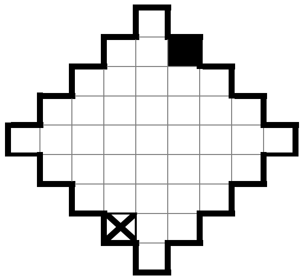


Partie B



La partie A se termine sans problème dans le désordre. C'est normal : nous savons qu'elle est réalisable dans l'ordre. La partie B n'est en revanche pas réalisable dans le désordre : elle ne l'est donc pas dans l'ordre. Nous avons donc ainsi montré que :

La configuration ci-contre, non résolue dans les chapitres précédents, **est impossible à réaliser.**



représente la case de départ, n° 71
représente la case finale, n° 13

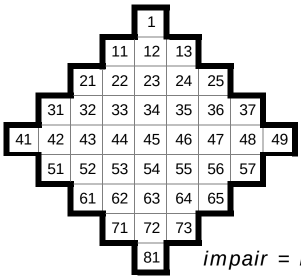
Chapitre 10 : réussite commentée du grand solitaire.

La partie commentée est celle qui a été le plus étudiée dans les chapitres 6, 8 et 9 ci-avant.

Départ : la bille n°71 est retirée

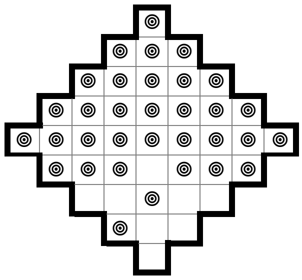
Case finale : la dernière bille restant sur le plateau sera sur la case 73.

Chaque coup est présenté de la façon suivante :
33 - 53 : la bille située sur la case 33 va sur la case 53 et mange la 44.

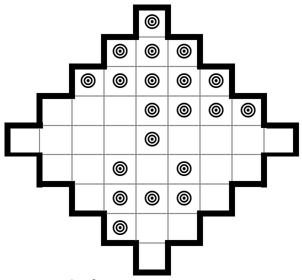


impair = bille noire
pair = bille blanche

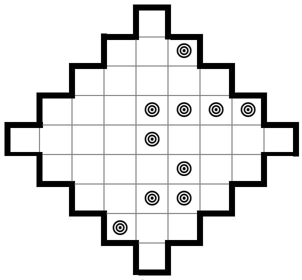
73 - 71	sacrifice d'une bille blanche (n°1)	c'est une blanche-neige.
54 - 72	le 2ème coup, comme le premier, est « forcé » (pas d'autre possibilité)	
65 - 63	sacrifice d'une bille blanche (n°2)	
62 - 64		
81 - 63	sacrifice d'une bille blanche (n°3)	c'est une blanche-neige.
64 - 62		
61 - 63	sacrifice d'une bille blanche (n°4)	*voir schéma ci-contre*
44 - 62		
51 - 53	sacrifice d'une bille blanche (n°5)	c'est une blanche-neige.
46 - 64		
57 - 55	sacrifice d'une bille blanche (n°6)	c'est une blanche-neige.
36 - 56		
49 - 47	sacrifice d'une bille blanche (n°7)	
56 - 36		
32 - 52		
41 - 43	sacrifice d'une bille blanche (n°8)	
52 - 32		
22 - 44		
31 - 33	sacrifice d'une bille blanche (n°9)	c'est une blanche-neige.
44 - 22	*voir schéma ci-contre*	
11 - 33	sacrifice d'une bille blanche (n°10)	
24 - 22		
21 - 23	sacrifice d'une bille blanche (n°11)	
62 - 44		
44 - 22		
22 - 24		
1 - 23	sacrifice d'une bille blanche (n°12)	c'est une blanche-neige.
34 - 12		
25 - 23	sacrifice d'une bille blanche (n°13)	
12 - 34	*voir schéma ci-contre*	
64 - 46		
46 - 24		
37 - 35	sacrifice d'une bille blanche (n° 14)	c'est une blanche-neige.
34 - 36		
13 - 35	sacrifice d'une bille blanche (n° 15)	
36 - 34		
34 - 54		
54 - 72	l'avant-dernier coup, comme le dernier, est « forcé » (pas d'autre possibilité)	
71 - 73	sacrifice d'une bille blanche (n°16)	c'est une blanche-neige.



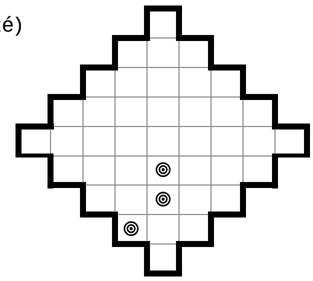
Les 2 coups finaux sont déjà préparés.



Les côtés gauche et droit sont vidés.



Le jeu peut être très étalé mais la solution est unique.



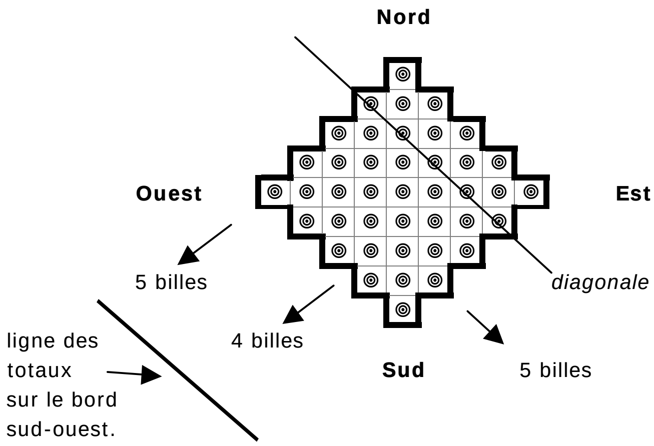
Deux coups avant la fin.

Chapitre 11 : la projection

Continunons à traiter le cas du grand solitaire. La transposition sur d'autres plateaux de ce principe de projection se fera en fin de chapitre.

1- / Le principe de projection :

Le principe de projection consiste simplement à compter le nombre de billes sur les diagonales.



Ainsi, si les totaux de chaque diagonale sont récapitulés sur les bords du plateau, nous obtenons :

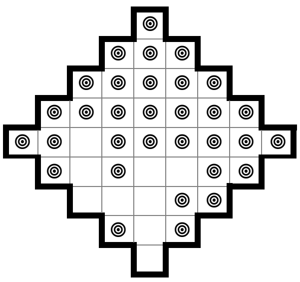
Totaux du bord Sud-Ouest (dans le sens du Sud vers l'Ouest) :

5	4	5	4	5	4	5	4	5

Totaux du bord Sud-Est (dans le sens du Sud vers l'Est) :

5	4	5	4	5	4	5	4	5

Par exemple le plateau ci-dessous peut donc être "résumé" par deux lignes de totaux :



Sud-Ouest :

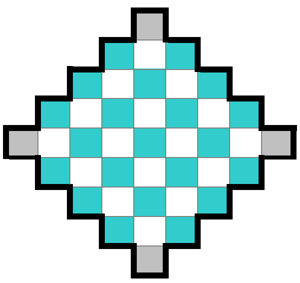
4	3	3	2	4	3	4	4	5

Sud-Est :

3	1	3	3	4	4	5	4	5

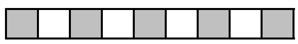
soit un total de 32 billes.

2- / L'application de la règle du damier :

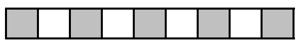


Chaque diagonale est d'une couleur unique, soit noire, soit blanche. On peut donc présenter les résultats des totaux de la façon suivante :

Sud-Ouest :



Sud-Est :



ou en utilisant l'écriture suivante :

N	B	N	B	N	B	N	B	N

3-/ L'application de la règle de l'équivalence :

Chaque coup horizontal ou vertical se traduit par une modification des lignes de totaux, consistant à enlever une bille sur deux totaux voisins, et à en rajouter une sur un troisième total voisin.

◎	◎	

devient

		◎

se traduit par exemple par, sur une ligne sud-est ou sud-ouest :

4	2	3

devient

3	1	4

Regardons comment s'applique la règle de l'équivalence :

Equivalence 0 :

0 =

=

	◎			◎		

=

		◎	◎	◎		

s'écrit sur les lignes de totaux :

0	0	0	0	0	0	0

=

0	1	0	0	1	0	0

=

0	0	1	1	1	0	0

de même :

=

		2				

devient sur les lignes de totaux :

0	0	0	0	0	0	0

=

0	0	2	0	0	0	0

Equivalence 1 :

1 =

	◎	

devient sur les lignes de totaux :

0	1	0

Equivalence « doublon » :

◎	
	◎

s'inscrit en revanche différemment sur les lignes de totaux, en fonction de l'orientation :

Sud-Ouest :

1	0	1

Sud-Est :

0	2	0

Pour rechercher l'équivalence d'un plateau, on peut donc rechercher (de façon simultannée) les équivalences des lignes de totaux sud-est et sud-ouest. Des opérations de simplification des lignes de totaux peuvent être effectuées, en déduisant des totaux des "équivalents 0", donc en déduisant par exemple de chaque ligne :

2

ou

1	1	1

ou

1	0	0	1

ou

4

ou encore

1			1

en effaçant les chiffres 0

L'objectif de la règle de l'équivalence est notamment de rechercher la position finale d'un plateau du solitaire. Cela implique que l'on recherche une position comprenant une seule bille restant sur le plateau, donc une équivalence pour laquelle chaque ligne de totaux comprend un total égal à 1, et les autres totaux égaux à 0.

Ainsi pour le plateau de grand solitaire donné en début de ce chapitre :

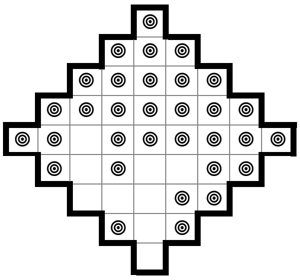
Sud-Ouest :

																					N	B	N	B	N	B	N	B	N
4	3	3	2	4	3	4	4	5	=	0	1	1	0	0	1	0	0	1	=		1								

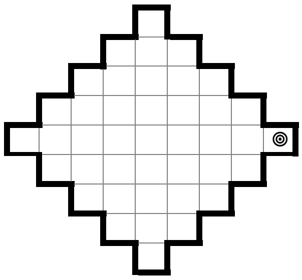
Sud-Est :

																					N	B	N	B	N	B	N	B	N
3	1	3	3	4	4	5	4	5	=	1	1	1	1	0	0	1	0	1	=										1

On peut reporter ce résultat sur un plateau :



=



Récapitulatif des équivalences :

Equivalence 0 : sur les 2 côtés Sud-Est et Sud-Ouest, un plateau équivalent à 0 se résume à :

N	B	N	B	N	B	N	B	N		
									=	0

Equivalence 1 : sur les 2 côtés Sud-Est et Sud-Ouest, un plateau équivalent à 1 se résume au chiffre 1 inscrit sur une seule case de chaque ligne de totaux.

par exemple

N	B	N	B	N	B	N	B	N		
		1							=	1

Equivalence doublon : comme on l'a observé plus haut, une équivalence doublon se résume finalement à deux lignes de totaux donnant un résultat différent :

L'une des deux lignes de totaux :

1		1	=		1		=	1

L'autre ligne de totaux :

	2		=	0

4- / La projection sur les différentes configurations de solitaire :

Le grand solitaire :

Sud-Ouest :

5	4	5	4	5	4	5	4	5

=

N	B	N	B	N	B	N	B	N
				1				

= 1

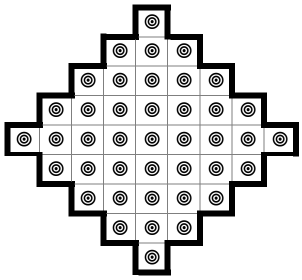
Sud-Est :

5	4	5	4	5	4	5	4	5

=

N	B	N	B	N	B	N	B	N
				1				

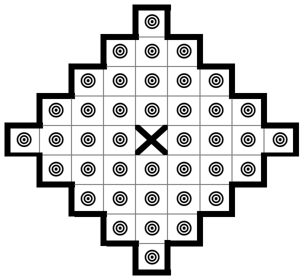
= 1



= 1

Retirons maintenant l'une des billes pour démarrer le jeu :

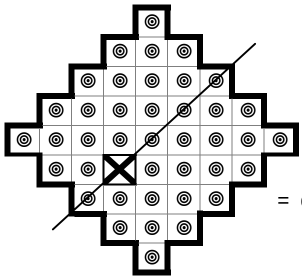
En retirant la **bille centrale** : ligne Sud-Ouest = 0
ligne Sud-Est = 0



= 0

Comme nous devions nous y attendre, ce plateau est un équivalent 0, et donc est **impossible** à réaliser.

Au lieu de retirer la bille centrale, retirons maintenant plutôt l'**une des billes situées sur la diagonale** passant par le centre du plateau :



= doublon

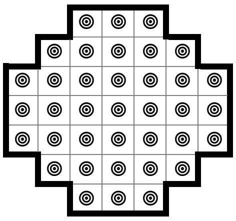
Nous obtenons l'une des lignes de totaux équivalente à 0
Ce plateau est donc soit un équivalent 0 (cas de la bille centrale retirée), soit un équivalent doublon.

Quelle que soit la case de départ située sur la diagonale passant par le centre du plateau, ce solitaire est **impossible** à réaliser !

Par effet de miroir, rotation du plateau, point de départ équivalent (case à une distance de 3 cases d'une case de la diagonale), **le repérage de configurations impossibles à réaliser est particulièrement rapide.**

En revanche toutes les configurations impossibles ne sont pas toujours repérées par cette méthode, comme nous l'avons vu au chapitre 6 : les solitaires dont les plateaux de départ commencent sur les cases noires 1, 41, 49, 81, ou sur les cases blanches 34, 44, 46 ou 54, sont des équivalents 1 mais sont impossibles à réaliser.

Le solitaire français :



Sud-Ouest :

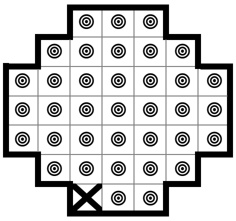
										N	B	N	B	N	B	N	B	N		
3	4	5	4	5	4	5	4	3	=					1					=	1

Sud-Est :

										N	B	N	B	N	B	N	B	N		
3	4	5	4	5	4	5	4	3	=					1					=	1

Comme nous l'avons vu précédemment, le solitaire français donne des résultats semblables en terme d'équivalence au grand solitaire. Les billes 1, 41, 49, 81 du grand solitaire, lorsqu'elles sont rajoutées ou retirées simultannément pour passer d'un solitaire français à un grand solitaire, ne modifient pas l'équivalence du plateau.

Faisons l'exercice, à partir des lignes de totaux, de rechercher l'ensemble des points d'arrivée pour le solitaire (équivalent 1) ci-dessous :



Sud-Ouest :

										N	B	N	B	N	B	N	B	N		
3	4	4	4	5	4	5	4	3	=	1									=	1

Sud-Est :

										N	B	N	B	N	B	N	B	N		
2	4	5	4	5	4	5	4	3	=			1							=	1

L'exercice que nous faisons nécessite de séparer les cas des billes noires et des billes blanches.

Pour les billes noires, le plateau est équivalent à un bille noire placée à l'intersection des diagonales suivantes :

Sud-Ouest :

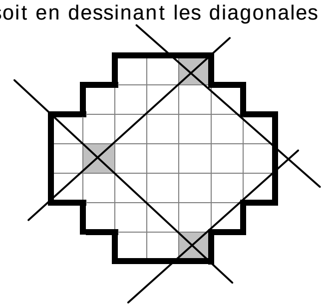
N	B	N	B	N	B	N	B	N
X						X		

Sud-Est :

N	B	N	B	N	B	N	B	N
		X						X

Donc 3 cases noires correspondent à des configurations finales permettant la réussite de ce solitaire.

soit en dessinant les diagonales :



Pour les billes blanches, le plateau est équivalent à un bille blanche placée à l'intersection des diagonales suivantes :

Sud-Ouest :

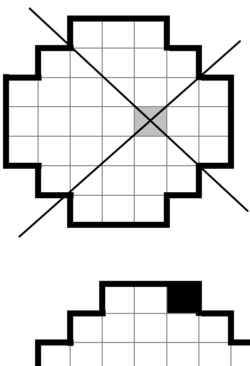
N	B	N	B	N	B	N	B	N
			X					

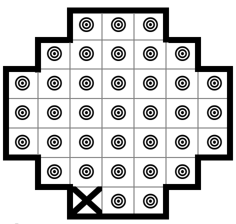
Sud-Est :

N	B	N	B	N	B	N	B	N
					X			

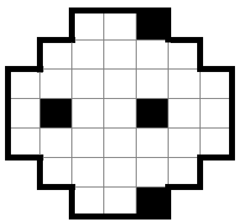
Donc 1 seule case blanche correspond à une configuration finale permettant la réussite de ce solitaire.

soit en dessinant les diagonales :





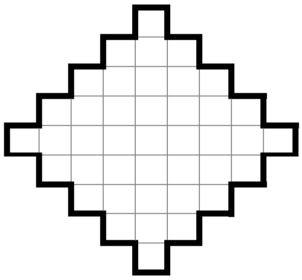
On retrouve bien le résultat du chapitre 2 : avec le plateau de départ de gauche, la solution finale sera obligatoirement une bille placée sur l'une des cases noircies du plateau de droite



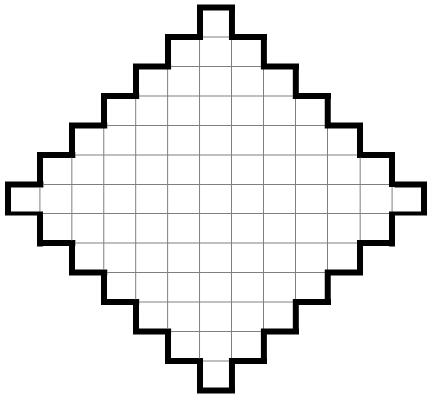
Le maxi-solitaire :

Une extrapolation pour des solitaires encore plus importants que le grand solitaire peut être donnée.

Prenons un solitaire de n cases de côté (comptons les cases d'une diagonale en bord de plateau), et correspondant aux formes ci-dessous.



Grand solitaire = 5 cases de côté,
soit 41 cases au total.



Maxi-solitaire de 7 cases de côté.

Le nombre total de cases d'un solitaire de n cases de côté est : $2n^2 - 2n + 1$
Le nombre de totaux sur une même ligne de totaux est : $2n - 1$

Prenons <u>n supérieur ou égal à 5</u>, pour ne pas nous retrouver dans le cas d'un déséquilibre entre le nombre de billes noires (situées sur un bord) et le nombre de billes blanches : comme nous l'avons étudié pour le mini-solitaire (chapitre 5), un maxi-solitaire de moins de 5 cases de côté est impossible à réaliser.

Le plateau du solitaire pour lequel aucune bille n'a été encore enlevé (pour le départ) se résume pour chaque ligne de totaux à :

<u>si n est impair</u>

N	B	N	B	N	B	N	B	N		N	B	N		
1		1		1		1		1	...	1		1	= 0	si n est multiple de 3
													= 1	si n n'est pas multiple de 3

<u>si n est pair</u>

N	B	N	B	N	B	N	B	N		N	B	N		
	1		1		1		1		...		1		= 0	si n-1 est multiple de 3
													= 1	si n-1 n'est pas multiple de 3

Retirons maintenant une bille du plateau, pour le départ :

<u>si n est impair</u>

n est multiple de 3 : *Ex : n = 9* — quelle que soit la première bille retirée, le plateau est équivalent à 1. Le solitaire est réalisable.

n n'est par multiple de 3 : *Ex : n = 5 ou 7* — en retirant la bille initiale sur certaines diagonales, le solitaire est un équivalent 0 ou un équivalent doublon. Le solitaire de côté n comprend des configurations non réalisables.

<u>si n est pair</u>

n-1 est multiple de 3 *Ex : n = 10* — quelle que soit la première bille retirée, le plateau est équivalent à 1. Le solitaire est réalisable.

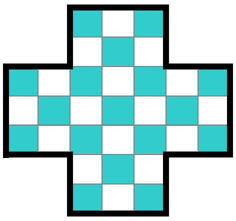
n-1 n'est pas multiple de 3 *Ex : n = 6* — en retirant la bille initiale sur certaines diagonales, le solitaire est un équivalent 0 ou un équivalent doublon. Le solitaire de côté n comprend des configurations non réalisables.

Chapitre 12 : retenir l'essentiel

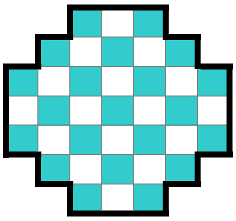
Pour faciliter le gain d'une partie du jeu du solitaire, 2 règles peuvent être appliquées. Cette méthode est décrite de façon complète dans les chapitres 1 et 2.

La règle du damier :

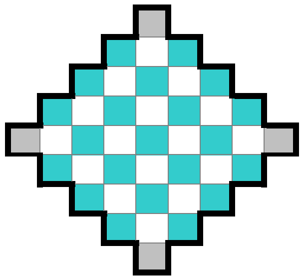
En calquant une damier sur le plateau du jeu du solitaire, le joueur doit s'attacher à **manger les billes noires en priorité.**



solitaire anglais



solitaire français

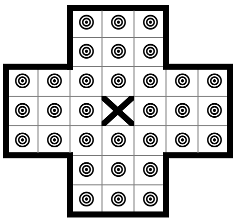


grand solitaire

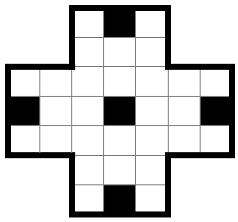
La règle de l'équivalence :

Cette règle permet de connaître dès le début de la partie la position finale du jeu.

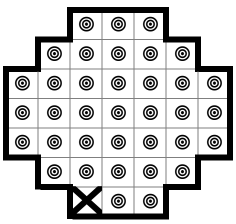
Solitaire anglais :



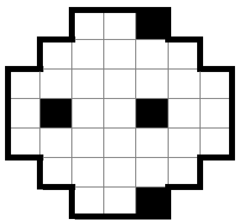
Avec le plateau de départ de gauche, la solution finale sera obligatoirement une bille placée sur l'une des cases noircies du plateau de droite



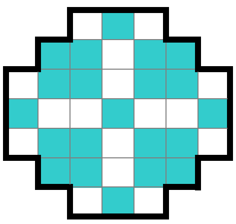
Solitaire français :



Avec le plateau de départ de gauche, la solution finale sera obligatoirement une bille placée sur l'une des cases noircies du plateau de droite



A noter aussi :

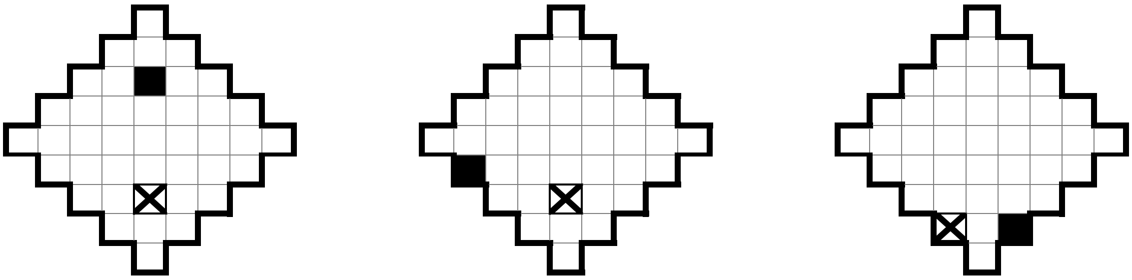


Avec un départ sur l'une des cases grises, réussir le jeu du solitaire est impossible

Avec un départ sur l'une des autres cases, réussir le jeu du solitaire est possible

Cas particulier du Grand Solitaire :

Les grands solitaires réalisables sont limités aux configurations ci-dessous,
et aux positions semblables par effet de miroir (symétrie) ou rotation du plateau.



☒ représente la case de départ *(ou inversement la case finale)*

■ représente la case finale *(ou inversement la case de départ)*

Pour réussir les Grands Solitaires, il est impératif de respecter rigoureusement certaines règles strictes, et notamment la règle du damier : seules les billes noires situées en bord de plateau peuvent manger une bille blanche, qui est ainsi sacrifiée.
En aucun cas, une bille noire qui n'est pas sur un bord ne doit manger une bille blanche.

Et maintenant à vous de jouer !